DM Terminale

Un des deux exercices est à faire le premier étant un peu plus technique

Exercice 1 :
On se donne un entier $n \geq 1$.

On s'intéresse alors à la famille de fonctions f_n définies sur $[0;+\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{e}{n} - 1 + x\,e^{1-x}$

1) Déterminer la limite de $f_n(x)$ en $+\infty$
2) Déterminer les variations de la fonction f_n et dresser son tableau de variations
3) a) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet, à partir d'une certaine valeur de n, deux solutions distinctes α_n et β_n dans des intervalles que l'on précisera
   b) Etablir, pour $x \geq 0$, une inégalité entre $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$
   c) En déduire les suites (α_n) et (β_n) sont de monotonies contraires
   d) Que peut-on en déduire pour ces deux suites ?

Exercice 2 : On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\,e^{x-1} + 1$. On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

Partie A

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$
   Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$
3) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Déterminer $f'(x)$
4) Etudier les variation de f et dresser son tableau de variations

Partie B Recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. On cherche, dans cette partie, s'il existe une tangente à la courbe C au point d'abscisse a qui passe par l'origine du repère.
1) On appelle T_a la tangente à C au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a
2) Démontrer qu'une tangente à C en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité : $1 - a^2 \times e^{a-1} = 0$
3) Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0;+\infty[$ de l'équation $1 - x^2 \times e^{x-1} = 0$
4) Donner alors une équation de la tangente recherchée