DM2 spe math terminale

Thème le symbole $\sum$

1) Déterminer une expression simple de la somme : $\sum_{k=1}^{n} 2k-1$

$$S = \sum_{k=1}^{n} 2k-1 = (2\times1-1)+(2\times2-1)+\ldots+(2\times n-1)$$

$$= 2\times(1+2+\ldots+n)-1\times n$$

$$= \frac{2\times n(n+1)}{2}-n$$

$$= n^2$$

2) Soit (u_n) une suite réelle . On suppose que pour tout n , $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n^2+n}{3}$.

Calculer u_n pour tout n $\in \mathbb{N}$.

$\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0+u_1+\ldots+u_n-(u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}) = u_n$ (tous s'éliminent sauf u_n)

d'où on applique la formule donnée :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{n^2+n}{3}-\frac{(n-1)^2+(n-1)}{3} = \frac{n^2+n-n^2+2n-1-n+1}{3} = \frac{2n}{3}$$

3) On donne $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Simplifier $u_{n+1}-u_n$ et en déduire la monotonie de la suite (u_n)

$$u_{n+1}-u_n = \sum_{k=n+1}^{2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n} = \frac{n(2n+2)+n(2n+1)-(2n+2)(2n+1)}{n(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{2n^2+2n+2n^2+n-4n^2-2n-4n-2}{n(2n+1)(2n+2)} = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} = \frac{-(3n+2)}{n(2n+1)(2n+2)}$$

Pour tout entier naturel n , le dénominateur est positif ainsi que 3n+2 d'où $u_{n+1}-u_n<0$ cad $u_{n+1}<u_n$ et la suite est décroissante

4) Soit une suite arithmétique (u_n) de premier terme 2 et de raison r .

On considère la somme S des termes de (u_n) allant de 5 à 20 :

$$S = u_5+u_6+\ldots+u_{20}$$

Déterminer la valeur de la raison r afin de réaliser : S = 132

$$S = u_0+5r+u_0+6r+\ldots+u_0+20r$$

$$= 16u_0 + (5+6+\ldots+20)r$$

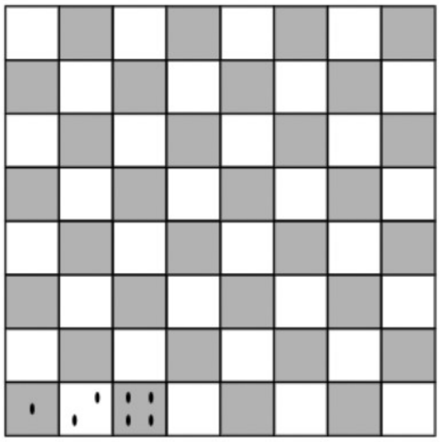
$$= 32 + (1+2+\ldots+20-1-2-3-4)r$$

$= 32 + \left(\frac{20\times21}{2} - 10\right)r \;=\; 32+200\,r$

Or S = 132 donc $200\,r+32=132$

$r = \frac{1}{2}$

5) Le problème de l'échiquier de Sissa



On place un grain de blé sur la première case d'un échiquier . On double alors à chaque case le nombre de grains de la case précédente. (un grain sur la 1ère case, deux sur la 2ème, 4 sur la 3ème

a) Combien de grain de blé aura-t-on placé sur l'échiquier après la $10^{ème}$ case ?

1+2+4+8+16+32+64+128+256+512 = 1023

b) Ecrire une fonction python **def nombregrain(n)** qui renvoie le nombre de grain de blé sur la $n^{ème}$ case.

```python
def nombregrain(n):
    u=1
    S=1
    for i in range(1,n):
        u=2*u
        S=S+u
    print(S)
    print(u)
```

En cours d'exécution: essai.py

```
>>> nombregrain(10)
1023
512
>>> nombregrain(64)
18446744073709551615
9223372036854775808
>>>
```