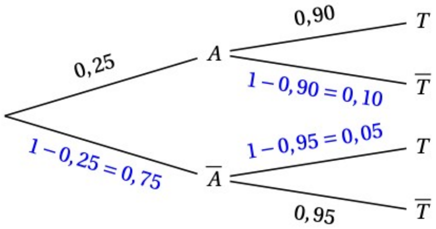
Sujet Bac blanc 2 Terminale A

Exercice 1
Partie 1

1. On résume la situation par un arbre pondéré.



$P(A\cap T)=P(A)\times P_A(T)=0,25\times 0,90=0,225$

2. D'après la formule des probabilités totales :
$P(T)=P(A\cap T)+P\left(\overline{A}\cap T\right)=0,225+0,75\times 0,05=0,2625$

3. On choisit un patient ayant un test positif. La probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques est :
$P_T(A)=\dfrac{P(A\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0,225}{0,2625}\approx 0,8571$

4. a. Les évènements correspondant à un résultat erroné du test sont : $\overline{A}\cap T$ et $A\cap\overline{T}$.
   b. On définit l'évènement E : « le test fournit un résultat erroné ».
   $P(E)=P\left(\overline{A}\cap T\right)+P\left(A\cap\overline{T}\right)=0,25\times 0,10+0,75\times 0,05=0,0625$

Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés. On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n=50$.
   a. On a une répétition de 50 épreuves indépendantes et identiques n'ayant que deux issues et dont le succès a pour probabilité $p=0,0625$; donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,\ p)$ de paramètres $n=50$ et $p=0,0625$.
   b. $P(X=7)=\dbinom{50}{7}\times 0,0625^7\times(1-0,0625)^{50-7}\approx 0,0237$
   c. La probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné est :
   $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-\dbinom{50}{0}\times 0,0625^0\times(1-0,0625)^{50}\approx 0,9603$

2. On cherche la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X\geqslant 10)$ soit supérieure à 0,95.
   $P(X\geqslant 10)>0,95\iff P(X<10)\leqslant 0,05\iff P(X\leqslant 9)\leqslant 0,05$
   À la calculatrice, par essais successifs, on trouve :
   - pour $n=247$, $P(X\leqslant 9)\approx 0,0514$;
   - pour $n=248$, $P(X\leqslant 9)\approx 0,0498$.

   Il faut donc un échantillon de taille au moins 248 pour que $P(X\geqslant 10)\geqslant 0,95$.

Exercice 2 :

1) a) Calcul d'un angle

$\overrightarrow{AB}\ (-2;2;-2)$ et $\overrightarrow{AC}\ (-3;-1;-1)$

$$\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{2}{3} \neq \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} = -2$$

Les coordonnées des deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et les points ne sont pas alignés

b) AB = $\sqrt{(-2)^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ AC = $\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{11}$

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = xx'+yy'+zz' = -2\times(-3)+2\times(-1)+(-2)\times(-1) = 6-2+2 = 6$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC}) = 2\sqrt{3}\times\sqrt{11}\times\cos(\widehat{BAC}) = 6$

On a donc $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{3}{\sqrt{33}}$ = 58,5°

2) a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}\ (-2;2;-2)$ est un vecteur normal au plan P donc ce plan a une équation de la forme $-2x+2y-2z+d=0$.

Le point C étant dans ce plan , on a : $-2x_C+2y_C-2z_C+d=0$

$$2-2-4+d=0$$

d = 4

Le plan a pour équation : $-2x+2y-2z+4=0$

ou encore $x-y+z-2=0$

b) Droite (AB) $\begin{cases} x=2-2t \\ y=0+2t \\ z=3-2t \end{cases}$ avec t ∈ ℝ .

c) A l'intersection E entre la droite et le plan on a :

$$x_E-y_E+z_E-2=0 \text{ et } \begin{cases} x_E=2-2t \\ y_E=0+2t \\ z_E=3-2t \end{cases}$$

d'où $2-2t-2t+3-2t-2=0$

$-6t+3=0$

t = $\frac{1}{2}$

on a alors : $\begin{cases} x_E=2-2\times\frac{1}{2} \\ y_E=0+2\times\frac{1}{2} \\ z_E=3-2\times\frac{1}{2} \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} x_E=1 \\ y_E=1 \\ z_E=2 \end{cases}$

d) La hauteur issue de C du triangle ABC est CE. On a donc :aire = $\frac{AB\times CE}{2}$

avec AB = $2\sqrt{3}$ et CE = $\sqrt{(1+1)^2+(1+1)^2+(2-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

d'où aire = $\dfrac{2\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}$

3) a) $\overrightarrow{AF}\ (-1;-1;0)$ et pour rappel $\overrightarrow{AB}\ (-2;2;-2)$ et $\overrightarrow{AC}\ (-3;-1;-1)$

Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\ (-2+6;2+2;0)$$

$$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\ (4;4;0) \quad \text{or} \quad \overrightarrow{AF}\ (-1;-1;0)$$

On constate donc que $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=-4\overrightarrow{AF}$; On a donc $\overrightarrow{AF} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

Cette combinaison linéaire prouve donc que ces trois vecteurs sont coplanaires . Or ces vecteurs ont un point commun A donc les points A , B , C , F sont coplanaires

b) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ étant non colinéaires, ils dirigent le plan (ABC) donc si (FD) est orthogonale à (ABC) on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FD}=0$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FD}=0$

$\overrightarrow{FD}\ (\ 2;-2;-4\ )$ d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FD} = -2\times 2+2\times(-2)+(-2)\times(-4) = 0$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FD} = -3\times 2+-1\times(-2)+(-1)\times(-4) = 0$$

Le vecteur $\overrightarrow{FD}$ est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires de (ABC) donc $\overrightarrow{FD}$ est orthogonale à (ABC) et la droite (FD) est orthogonale à ce plan

c) On choisit comme base pour le tétraèdre le triangle ABC . La hauteur correspondante est donc FD d'où Volume = $\dfrac{\mathrm{A}ir\mathrm{e}(\mathrm{ABC})\times \mathrm{FD}}{3}$ avec FD = $\sqrt{2^2+(-2)^2+(-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

Volume = $\dfrac{2\sqrt{6}\times 2\sqrt{6}}{3}$ = 8 unités de volume

Exercice 3 :

Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout réel $x \in]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$.

1. On note g' la dérivée de g. On a : $g'(x) = \dfrac{2\dfrac{1}{x} \times x - 2\ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{2 - 2\ln x}{x^2}$
2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		e		$+\infty$
Variations de g	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

a. La valeur $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ est l'image de e par f : $f(\mathrm{e}) = \dfrac{2\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

b. $g'(x) = \dfrac{2 - 2\ln x}{x^2}$ donc $g'(x)$ est du signe de $2 - 2\ln x = 2(1 - \ln x)$.

- Sur $]0\,;\,\mathrm{e}[$, $\ln x < 1$ donc $1 - \ln x > 0$ donc $g'(x) > 0$; la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.
- Sur $]\mathrm{e}\,;+\infty[$, $\ln x > 1$ donc $1 - \ln x < 0$ donc $g'(x) < 0$; la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle.

c. On justifie les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 2\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.
  Donc, par produit de limites, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 2\ln x \times \dfrac{1}{x} = -\infty$.
- D'après le cours, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

3. On en déduit le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
signe de $g(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = [\ln(x)]^2$.
Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

1. $[(u(x)^2]' = 2u'(x)u(x)$ donc $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x = \dfrac{2\ln x}{x} = g(x)$
   Donc sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g.

2. **a.** On étudie la convexité de la fonction f.
   D'après les questions précédentes, la fonction g, dérivée de la fonction f, est croissante sur $]0\,;\,\mathrm{e}[$, donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.
   De même, la fonction g, dérivée de la fonction f, est décroissante sur $]\mathrm{e}\,;+\infty[$, donc la fonction f est concave sur cet intervalle.
   De plus, la fonction g donc la fonction f', change de sens de variation en $x = \mathrm{e}$, donc la courbe représentant la fonction f admet un point d'inflexion en $x = \mathrm{e}$.
   b. On étudie les variations de la fonction f en utilisant le signe de $f' = g$.
   Sur l'intervalle $]0\,;1[$, la fonction g est négative donc f' est négative ; la fonction f est donc strictement décroissante sur cet intervalle.
   Sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, la fonction g est positive donc f' est positive ; la fonction f est donc strictement croissante sur cet intervalle.
   De plus on peut dire que la fonction f admet un minimum pour $x = 1$.
3. **a.** Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse e est : $y = f'(\mathrm{e})(x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$. On a : $f'(\mathrm{e}) = g(\mathrm{e}) = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$; $f(\mathrm{e}) = (\ln \mathrm{e})^2 = 1$
   L'équation devient : $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}(x - \mathrm{e}) + 1$ soit $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}x - 2 + 1$ c'est-à-dire $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}x - 1$.
   b. La courbe représentant f admet un point d'inflexion en $x = \mathrm{e}$ donc la tangente en ce point coupe la courbe ; à gauche du point, la fonction est convexe donc la courbe est au dessus de cette tangente.
   On en déduit que sur $]0\,;\,\mathrm{e}]$, on a : $[\ln(x)]^2 \geqslant \dfrac{2}{\mathrm{e}}x - 1$.