Bac Blanc n°2 Terminale Spécialité mathématiques

4 heures
Calculatrice en mode examen

Le sujet est composé de trois exercices . Une large part de la notation sera accordée à la qualité de la rédaction

EXERCICE 1 (7 points) **Thème : probabilités**

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.

Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas ;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

Les probabilités demandées dans la suite de l'exercice seront arrondies à 10^{-4} près si nécessaire.

Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.

On considère les événements suivants :

- A : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques » ;
- T : « le test est positif » ;
- $\bar{A}$ et $\bar{T}$ sont respectivement les événements contraires de A et T.

1. Calculer $\mathrm{P}(A \cap T)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Démontrer que $\mathrm{P}(T) = 0{,}2625$.

3. On choisit un patient ayant un test positif. Calculer la probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques.

4. **a.** Parmi les événements suivants, déterminer ceux qui correspondent à un résultat erroné du test : $A \cap T, \bar{A} \cap T, A \cap \bar{T}, \bar{A} \cap \bar{T}$.

b. On définit l'événement E : « le test fournit un résultat erroné ».
Démontrer que $\mathrm{P}(E) = 0{,}0625$.

Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés.
On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n = 50$.

- **a.** Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}0625$.
- **b.** Calculer P(X=7).
- **c.** Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné.

2. Quelle valeur minimale de la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X \geqslant 10)$ soit supérieure à 0,95 ?

Exercice 2 (7 points) Thème : Géométrie dans l'espace

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(2; 0; 3),\ B(0; 2; 1),\ C(-1; -1; 2) \text{ et } D(3; -3; -1).$$

1- Calcul d'un angle.

- **a-** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- **b-** Calculer les longueurs AB et AC.
- **c-** À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.

2- Calcul d'une aire.

- **a-** Déterminer une équation du plan P passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).
- **b-** Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
- **c-** En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection entre la droite (AB) et le plan P.
- **d-** Calculer l'aire du triangle ABC.

3- Calcul d'un volume.

- **a-** Soit le point $F(1; -1; 3)$. Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.
- **b-** Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).
- **c-** Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

EXERCICE 3 (7 points) **Thème : fonctions**

Partie 1

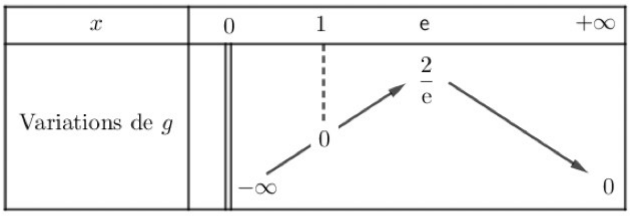
Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2\ln x}{x}.$$

1. On note g' la dérivée de g. Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$g'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x^2}$$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$:



Justifier les informations suivantes lues dans ce tableau :

a. la valeur $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$;

b. les variations de la fonction g sur son ensemble de définition ;

c. les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

3. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (\ln(x))^2$.

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

1. Démontrer que sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g.

2. À l'aide de la **partie 1**, étudier :

a. la convexité de la fonction f ;

b. les variations de la fonction f.

3. **a.** Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e.

b. En déduire que, pour tout réel x dans $]0\ ;\mathrm{e}]$:

$$(\ln(x))^2 \geqslant \frac{2}{\mathrm{e}}x - 1.$$