<u>Bac Blanc 1 Terminale A</u> **<u>Epreuve de mathématiques</u>** **Le Mardi 15 novembre 2022**

<u>Durée :</u> 3 heures **Calculatrice en mode examen**

<u>Exercice 1 :</u> 6 points

Partie A (justifications demandées)

Soit f la fonction définie sur]0;+∞[par f(x) = $\frac{e^{2x}}{x}$

On donne l'expression de la dérivée seconde f'' de f définie sur]0;+∞[par : $f''(x) = \frac{2e^{2x}(2x^2-2x+1)}{x^3}$

1) La fonction f', dérivée de f, est définie sur]0;+∞[par :

a. $f'(x)=2e^{2x}$ **b.** $f'(x)=\frac{e^{2x}(x-1)}{x^2}$

c. $f'(x)=\frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$ **d.** $f'(x)=\frac{e^{2x}(2x+1)}{x^2}$

$f'(x) = \frac{2e^{2x}\times x-e^{2x}\times 1}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$ réponse c

2) La fonction f :

a. est décroissante sur]0;+∞[**b.** est monotone sur]0;+∞[

c. admet un minimum en $\frac{1}{2}$ **d.** admet un maximum en $\frac{1}{2}$

On étudie le signe de f' c'est à dire de $\frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$. Ce signe dépend de 2x-1 car e^{2x} et x^2 sont positifs donc pour tout x ∈ $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$, $f'(x)$ est négatif donc f décroissante et pour tout x ∈ $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, $f'(x)$ est positif donc f croissante . f admet donc un minimum en $\frac{1}{2}$ réponse c

3) La fonction f est

a. concave sur]0;+∞[**b.** convexe sur]0;+∞[

c. concave sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ **c.** est représenté par une courbe admettant un point d'inflexion

On étudie ici le signe de la dérivée seconde c'est à dire le signe de $\frac{2e^{2x}(2x^2-2x+1)}{x^3}$ qui dépend de $2x^2-2x+1$ et de x³ . Comme $\Delta=4-8=-4$ <0 , le polynôme du second degré est du signe de 2 donc positif d'où f'' est du signe de x^3 donc négatif chez les négatifs et positif chez les positifs d'où f est convexe sur]0;+∞[réponse b

Partie B (justifications non demandées)

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\,e^{-2x}$.

On note f'' la dérivée seconde de f . Quel que soit le réel x, $f''(x)$ est égal à :

a. $(1-2x)e^{-2x}$ **b.** $4(x-1)e^{-2x}$

c. $4e^{-2x}$ **d.** $(x+2)e^{-2x}$

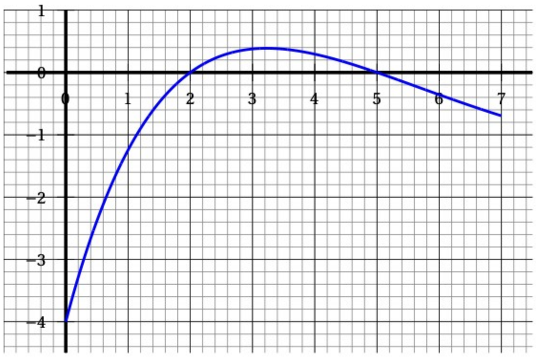
réponse b

2) Un élève de première générale choisit trois spécialités parmi les douze proposées. Le nombre de combinaisons possibles est :

a. 1728 **b.** 1320 **c.** 220 **d.** 33

réponse c

3. On donne ci-dessous la représentation graphique de f' fonction dérivée d'une fonction f définie sur [0;7]



Le tableau de variation de la fonction f sur [0;7] est :

a.

x	0	3,25	7
$f(x)$	↗		↘

b.

x	0	2	5	7
$f(x)$	↘	↗	↘	

c.

x	0	2	5	7
$f(x)$	↗	↘	↗	

d.

x	0	2	7
$f(x)$	↗		↘

réponse b car f' est négative puis positive puis négative

4. Une entreprise fabrique des cartes à puces. Chaque puce peut représenter deux défauts A et B .

Une étude statistique montre que 2,8 % des puces ont le défaut A , 2,2 % des puces ont le défaut B et heureusement 95,4 % des puces n'ont aucun des deux défauts.

La probabilité qu'une puce prélevée au hasard ait les deux défaut est :

a. 0,05 **b.** 0,004 **c.** 0,046 **d.** on ne peut pas savoir

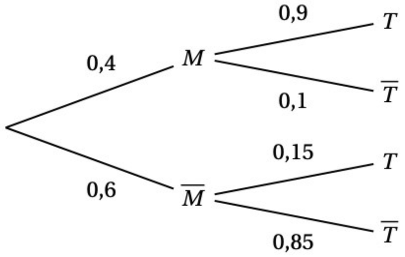
réponse b

EXERCICE 2 — 6 points

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. **a.** On traduit la situation par un arbre pondéré.



b. Il faut trouver $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$.

c. On a de même $P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,6 \times 0,15 = 0,09$.

D'après la loi des probabilités totales :

$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,36 + 0,09 = 0,45$.

d. Il faut trouver $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,36}{0,45} = \dfrac{36}{45} = \dfrac{9 \times 4}{9 \times 5} = \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{10} = 0,8$.

2. **a.** On suppose que le nombre de chats est assez important pour que l'on puisse assimiler le choix des 20 chats à un tirage avec remise.

La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et de probabilité $p = 0,45$ trouvé à la question **1. c.**.

b. On a $p(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,45^5 \times (1 - 0,45)^{20-5} = 15504 \times 0,45^5 \times 0,55^{15} \approx 0,0365$ soit environ 0,037.

c. La calculatrice donne $P(X < 9) \approx 0,414$.

d. On sait que l'espérance $E = n \times p = 20 \times 0,45 = 9$.

Cela signifie que sur un grand nombre d'échantillons il y aura en moyenne 9 chats positifs par échantillon de 20.

3. **a.** On a encore une loi binomiale de paramètres n et de probabilité d'être positif de 0,45.

On a $P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,45^0 \times 0,55^n = 0,55^n$.

Donc $p_n = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,55^n$.

b. En partant de $n = 0$, le programme calcule p_n et augmente la taille de l'échantillon de 1 tant que $p_n < 0,99$.

c. On cherche donc n tel que $1 - 0,55^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant 0,55^n$, d'où par croissance de la fonction logarithme népérien : $\ln 0,01 \geqslant n \ln 0,55 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,55} \leqslant n$ (car $\ln 001 < 0$).

Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,55} \approx 7,7$.

Conclusion : le programme renvoie la valeur 8.

EXERCICE 3 — 6 points

Commun à tous les candidats

I – Premier modèle

En 10 minutes la température a augmenté de $1,3-(-19) = 1,3+19 = 20,3$ soit une augmentation de 2,03 °C.

Selon ce premier modèle l'augmentation de la température serait au bout de 25 minutes de $25 \times 2,03 = 50,75$ (°C).

Les gâteaux seraient donc à une température de $-19 + 50,75 = 31,75$(°C) alors que la température ambiante est de 25 °C : c'est impossible, donc ce modèle n'est pas pertinent.

II – Second modèle

1. On a $T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25) \iff T_{n+1} - T_n = -0,06T_n + 1,5 \iff T_{n+1} = T_n - 0,06T_n + 1,5 \iff T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$.

2. ✦ Avec $n = 0$, la relation précédente donne $T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5 = 1,5 - 17,86 = -16,36$;

   ✦ Avec $n = 1$, la relation précédente donne $T_2 = 0,94 \times (-16,36) + 1,5 = 1,5 - 15{,}3784 = -13{,}8784$.

3. *Initialisation* $T_0 = -19 \leqslant 25$. L'inégalité est vraie au rang 0.

   Hérédité Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leqslant 25$ alors en multipliant par 0,94 :

   $0,94T_n \leqslant 0,94 \times 25$, soit $0,94T_n \leqslant 23,5$.

   D'où en en ajourant à chaque membre 1,5 :

   $0,94T_n + 1,5 \leqslant 23,5 + 1,5$, soit finalement $T_{n+1} \leqslant 25$: l'inégalité est vraie au rang n.

   Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$.

   D'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leqslant 25$.

   Ceci correspond à une évidence : la température des gâteaux ne peut dépasser la température ambiante.

4. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25)$.

   D'après la question précédente $T_n \leqslant 25$ soit en multipliant par 0,06 :

   $0,06T_n \leqslant 0,06 \times 25$, ou $0,06T_n \leqslant 1,5$

   et en prenant les opposés : $-1,5 \leqslant -0,06T_n$ et enfin en ajoutant à chaque membre 1,5 :

   $0 \leqslant -0,6T_n + 1,5$.

   On a donc démontré que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n \geqslant 0$: la suite (T_n) est donc croissante.

5. On a donc démontré que la suite (T_n) est croissante et majorée par 25 : elle converge donc vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 25$.

6. On pose pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.

   a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0,94T_n + 1,5 - 25$ ou encore $U_{n+1} = 0,94T_n - 23,5 = 0,94\left(T_n - \dfrac{23,5}{0,94}\right) = 0,94(T_n - 25)$, soit finalement $T_{n+1} = 0,94U_n$:cette égalité montre que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 0,94 et de premier terme $U_0 = T_0 - 25 = -19 - 25 = -44$.

   b. On sait que quel soit $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times 0,94^n$ ou $U_n = -44 \times 0,94^n$.
   Or $U_n = T_n - 25 \iff T_n = U_n + 25$ ou encore $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$, soit finalement :

   $$T_n = 25 - 44 \times 0,94^n, \text{quel que soit } n \in \mathbb{N}$$

   c. Comme $0 < 0,94 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,94^n = 0$, d'où par somme de limites :

   $$\lim_{n \to +\infty} T_n = \ell = 25.$$

7. **a.** On a $T_{25} = 25 - 44 \times 0,97^{25} \approx 15,632$ soit environ 16°C.

   b. La calculatrice donne $T_{17} \approx 9,63$ et $T_{18} \approx 10,55$, donc Cécile devra déguster son gâteau entre la 17e et la 18e minute après sa sortie.

   c.

```
def seuil() :
    n=0
    T = −19
    while T < 10
        T = 0,94T + 1,5
        n=n+1
    return
```

÷+÷÷+÷