

Jeudi 25 novembre 2021 11 heures

Exercice 1 : 8 points

Déterminer la limite des suites suivantes par la méthode de votre choix :

a) $u_n = \frac{2n^2+4}{n+8}$ facile $+\infty$

b) $u_n = 5n^2 - 4n + 2$ facile $+\infty$

c) $u_n = 4 + \frac{\sin(n)}{n}$ on sait que $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ donc on a $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$ d'où

$$4 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 4 + \frac{1}{n}$$
 on termine alors avec un th des gendarmes

d) $u_n = \frac{5}{4+0,6^n}$ facile $\frac{5}{4}$

e) $u_n = \frac{3^n+2^n}{4^n} = \frac{3^n}{4^n} + \frac{2^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{2}{4}\right)^n$ donc limite 0

f) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ limite 0

Exercice 2 : 5 points

Dire si chacune des affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant soigneusement la réponse

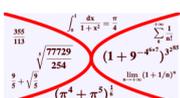
Soit (u_n) une suite de termes strictement positifs :**Affirmation 1** : Si pour tout n de \mathbb{N} , $u_n \leq 5$ alors la suite (u_n) converge

Faux il manque la condition sur le sens de variation de la suite pour appliquer le th

On peut aussi donner un contre exemple : $u_n = 2 + (-1)^n$ **Affirmation 2** : Si pour tout n de \mathbb{N} , $u_n \geq \frac{n}{2}$ alors la suite (u_n) diverge

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} = +\infty \text{ or } u_n \geq \frac{n}{2} \text{ donc d'après les th de comparaisons sur les limites, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

VRAI

Pour les deux affirmations suivantes on définit la suite (v_n) par $v_n = -\frac{2}{u_n}$ **Affirmation 3** : Si (u_n) est convergente alors (v_n) est convergenteFaux contre exemple : $u_n = \frac{1}{n}$ on a alors $v_n = -2n$ on a (u_n) qui CV et (v_n) qui DV**Affirmation 4** : Si (u_n) est divergente alors (v_n) converge vers 0Faux contre exemple : $u_n = (-1)^n$ on a $v_n = -\frac{2}{(-1)^n}$ Les deux suites divergent

Exercice 3 : 7 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}$.

On admet que tous les termes de la suite sont définis et strictement positifs.

1) Démontrer que $u_{n+1} - 1 = 2 - \frac{8}{3+u_n}$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{1+3u_n}{3+u_n} - 1 = \dots = \frac{-2+2u_n}{3+u_n} \quad \text{et} \quad 2 - \frac{8}{3+u_n} = \dots = \frac{-2+2u_n}{3+u_n}$$

2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $u_n > 1$

initialisation : $u_0 = 2 > 1$ relation vraie au rang 0

SQ il existe n tel que $u_n > 1$ et DQ $u_{n+1} > 1$

On sait que $u_n > 1$

$$3 + u_n > 4$$

$$\frac{8}{3 + u_n} < 2$$

$$2 - \frac{8}{3 + u_n} > 0$$

$$u_{n+1} - 1 > 0$$

$$u_{n+1} > 1$$

On termine la récurrence

3) a) Etablir que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \frac{1+3u_n - 3u_n - u_n^2}{3+u_n} = \frac{1-u_n^2}{3+u_n} = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$$

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)

On sait que $u_n > 1$ donc $1 - u_n < 0$, $1 + u_n > 2 > 0$ et $3 + u_n > 4 > 0$ d'où $u_{n+1} - u_n < 0$ cad $u_{n+1} < u_n$ et la suite est décroissante

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ .

suite décroissante minorée par 1 donc convergente

d) Déterminer cette limite ℓ .

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n} \quad \text{donc à la limite on a } \ell = \frac{1+3\ell}{3+\ell}$$

donc $\ell(3+\ell) = 1+3\ell$ ce qui donne 1 ou -1 comme limite possible mais la suite est minorée par 1

donc la limite est 1

