Interrogation écrite Terminale Limites de suites

Jeudi 25 novembre 20211 heure

<u>Exercice 1 :</u> 8 points

Déterminer la limite des suites suivantes par la méthode de votre choix :

a) $u_n = \dfrac{2n^2+4}{n+8}$ facile $+\infty$ b) $u_n = 5n^2-4n+2$ facile $+\infty$

c) $u_n = 4+\dfrac{\sin(n)}{n}$ on sait que $-1\leq\sin(n)\leq 1$ donc on a $-\dfrac{1}{n}\leq\dfrac{\sin(n)}{n}\leq-\dfrac{1}{n}$ d'où

$4-\dfrac{1}{n}\leq u_n\leq 4+\dfrac{1}{n}$ on termine alors avec un th des gendarmes

d) $u_n = \dfrac{5}{4+0{,}6^n}$ facile $\dfrac{5}{4}$

e) $u_n = \dfrac{3^n+2^n}{4^n} = \dfrac{3^n}{4^n}+\dfrac{2^n}{4^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ donc limite 0

f) $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ limite 0

<u>Exercice 2 :</u> 5 points

Dire si chacune des affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant soigneusement la réponse

Soit (u_n) une suite de termes strictement positifs :

Affirmation 1 : Si pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n\leq 5$ alors la suite (u_n) converge

Faux il manque la condition sur le sens de variation de la suite pour appliquer le th

On peux aussi donner un contre exemple : $u_n=2+(-1)^n$

Affirmation 2 : Si pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n\geq\dfrac{n}{2}$ alors la suite (u_n) diverge

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{2} = +\infty$ or $u_n\geq\dfrac{n}{2}$ donc d'après les th de comparaisons sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

VRAI

Pour les deux affirmations suivantes on définit la suite (v_n) par $v_n = -\dfrac{2}{u_n}$

Affirmation 3 : Si (u_n) est convergente alors (v_n) est convergente

Faux contre exemple : $u_n=\dfrac{1}{n}$ on a alors $v_n = -2n$ on a (u_n) qui CV et (v_n) qui DV

Affirmation 4 : Si (u_n) est divergente alors (v_n) converge vers 0

Faux contre exemple : $u_n = (-1)^n$ on a $v_n=-\dfrac{2}{(-1)^n}$ Les deux suites divergent

Exercice 3 : 7 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$.

On admet que tous les termes de la suite sont définis et strictement positifs .

1) Démontrer que $u_{n+1}-1 = 2-\dfrac{8}{3+u_n}$

$$u_{n+1}-1=\frac{1+3u_n}{3+u_n}-1 = \dots = \frac{-2+2u_n}{3+u_n} \quad \text{et} \quad 2-\frac{8}{3+u_n} = \dots = \frac{-2+2u_n}{3+u_n}$$

2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $u_n>1$

initialisation : $u_0 = 2 > 1$ relation vraie au rang 0

SQ il existe n tel que $u_n>1$ et DQ $u_{n+1}>1$

On sait que $u_n>1$

$$3+u_n>4$$

$$\frac{8}{3+u_n}<2$$

$$2-\frac{8}{3+u_n}>0$$

$$u_{n+1}-1>0$$

$$u_{n+1}>1$$

On termine la récurrence

3) a) Etablir que pour tout entier naturel n , $u_{n+1}-u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \frac{1+3u_n-3u_n-u_n^2}{3+u_n} = \frac{1-u_n^2}{3+u_n} = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$$

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)

On sait que $u_n>1$ donc $1-u_n<0$, $1+u_n>2>0$ et $3+u_n>4>0$ d'où $u_{n+1}-u_n<0$ cad $u_{n+1}<u_n$ et la suite est décroissante

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ .

suite décroissante minorée par 1 donc convergente

d) Déterminer cette limite ℓ .

$u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$ donc à la limite on a ℓ = {1+3ℓ}/{3+ℓ}

donc ℓ (3+ℓ)=1+3ℓ ce qui donne 1 ou -1 comme limite possible mais la suite est minorée par 1 donc la limite est 1