

DS Spé math récurrence le 20 septembre 2021 Corrigé

Exercice 1:

1) Initialisation : $u_0=0 \in [0;4]$ donc la propriété est vraie au rang 0

SQ il existe n tel que $0 \leq u_n \leq 4$

DQ $0 \leq u_{n+1} \leq 4$

On sait que $0 \leq u_n \leq 4$

$$3 \cdot 0 + 4 \leq 3 u_n + 4 \leq 3 \cdot 4 + 4$$

$$4 \leq 3 u_n + 4 \leq 16$$

$\sqrt{4} \leq \sqrt{3 u_n + 4} \leq \sqrt{16}$ on conserve l'ordre car la fonction racine est croissante sur \mathbb{R}^+

$$0 \leq 2 \leq u_{n+1} \leq 4$$

La propriété est donc héréditaire or elle est vraie au rang 0 donc par hérédité elle est vraie pour tout entier n

2) a) $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 3 u_n + 4 - u_n^2 = -u_n^2 + 3 u_n + 4$

or $-(u_n+1)(u_n-4) = -(u_n^2 - 4 u_n + u_n - 4) = -u_n^2 + 3 u_n + 4$

d'où la réponse

b) u_n est un nombre positif donc u_n+1 aussi et comme $u_n \leq 4$, u_n-4 est négatif on en déduit que $u_{n+1}^2 - u_n^2$ est positif. D'où $(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n)$ est positif or comme (u_n) est une suite positive, $u_{n+1} + u_n$ aussi d'où $u_{n+1} - u_n$ est positif c'est à dire $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite est croissante.

Exercice 2 :

1) $v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1 = \left(\frac{1}{3}\sqrt{u_n^2+8}\right)^2 - 1 = \frac{1}{9}(u_n^2+8) - 1 = \frac{1}{9}u_n^2 - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}(u_n^2 - 1) = \frac{1}{9}v_n$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{9}$

2) $p_{n+1} - p_n = (n+1)^2 - 42(n+1) + 4 - n^2 + 42n - 4 = n^2 + 2n + 1 - 42n - 42 - n^2 + 42n = 2n - 41$

$$2n - 41 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{41}{2}$$

On a donc $p_{n+1} - p_n \geq 0$ à partir du rang 21

la suite est donc croissante à partir du rang 21

Donc réponse FAUX

3) (k_n) est minorée par 2 donc pour tout entier n, $k_n \geq 2$

$$\frac{1}{k_n} \leq \frac{1}{2} \text{ on inverse l'ordre car la fonction}$$

inverse est décroissante sur \mathbb{R}^+ .

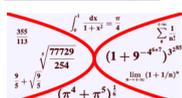
$$\frac{2}{k_n} \leq 1$$

$$-\frac{2}{k_n} \geq -1 \text{ changement de l'ordre car } x \rightarrow -x$$

$$w_n \geq -1$$

La suite (w_n) est donc minorée par -1

Exercice 3 :



1) a) $f'(x) = -\frac{1}{90}x + 1,25$

$-\frac{1}{90}x + 1,25 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 90 \cdot 1,25 \quad \text{ssi} \quad x \leq 112,5$

Ainsi sur $[0;50]$, on a $f'(x) \geq 0$ c'est à dire f croissante

b) $f(x) = x \Leftrightarrow -\frac{1}{180}x^2 + 1,25x = x \Leftrightarrow -x^2 + 225x = 180x \Leftrightarrow -x^2 + 45x = 0 \Leftrightarrow$

$x(-x + 45) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 45$

2) a) initialisation: $n = 0$

$u_0 = 12$

$u_1 = -\frac{1}{180}u_0 + 1,25u_0 = -\frac{12^2}{180} + 1,25 \cdot 12 = -\frac{12}{15} + 15 = \frac{71}{5} = 14,2$

On a donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 45$

SQ il existe n tel que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 45$

DQ $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 45$

On sait que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 45$ or la fonction f est croissante sur $[0;50]$ donc elle conserve

l'ordre d'où $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(45)$ or $f(0) = 0$ et $f(45) = 45$ d'où

$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 45$

On termine la récurrence

b) on vient de voir que pour tout n, $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite est croissante

on peut aussi dire qu'elle est bornée par 0 et 45

3) a)

n=0

u=12

while u<42 :

$u = -\frac{1}{180} \cdot u + 1,25 \cdot u$

n = n+1

print(n)

b) La calculatrice donne n = 15 : on a $u_{14} \approx 41,9$ et $u_{15} \approx 42,6$

donc on dépasse en $2017 + 15 = 2032$

