DS Spé math récurrence le 20 septembre 2021 Corrigé

Exercice 1:

1) Initialisation : $u_0 = 0 \in [0;4]$ donc la propriété est vraie au rang 0

SQ il existe n tel que $0 \le u_n \le 4$

DQ $0 \le u_{n+1} \le 4$

On sait que $0 \le u_n \le 4$

$$3 \cdot 0 + 4 \le 3u_n + 4 \le 3 \cdot 4 + 4$$

$$4 \le 3u_n + 4 \le 16$$

$$\sqrt{4} \le \sqrt{3u_n + 4} \le \sqrt{16}$$ on conserve l'ordre car la fonction racine est croissante sur ℝ⁺

$$0 \le 2 \le u_{n+1} \le 4$$

La propriété est donc héréditaire or elle est vraie au rang 0 donc par hérédité elle est vraie pour tout entier n

2) a) $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 3u_n + 4 - u_n^2 = -u_n^2 + 3u_n + 4$

or $-(u_n+1)(u_n-4) = -(u_n^2 - 4u_n + u_n - 4) = -u_n^2 + 3u_n + 4$

d'où la réponse

b) u_n est un nombre positif donc $u_n + 1$ aussi et comme $u_n \le 4$, $u_n - 4$ est négatif on en déduit que $u_{n+1}^2 - u_n^2$ est positif . D'où $(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n)$ est positif or comme (u_n) est une suite positive , $u_{n+1} + u_n$ aussi d'où $u_{n+1} - u_n$ est positif c'est à dire $u_{n+1} \ge u_n$ et la suite est croissante.

Exercice 2 :

1) $v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1 = \left(\frac{1}{3}\sqrt{u_n^2+8}\right)^2 - 1 = \frac{1}{9}(u_n^2+8) - 1 = \frac{1}{9}u_n^2 - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}(u_n^2 - 1) = \frac{1}{9}v_n$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{9}$

2) $p_{n+1} - p_n = (n+1)^2 - 42(n+1) + 4 - n^2 + 42n - 4 = n^2 + 2n + 1 - 42n - 42 - n^2 + 42n = 2n - 41$

$$2n - 41 \ge 0 \Leftrightarrow n \ge \frac{41}{2}$$

On a donc $p_{n+1} - p_n \ge 0$ à partir du rang 21

la suite est donc croissante à partir du rang 21

Donc réponse FAUX

3) (k_n) est minorée par 2 donc pour tout entier n, $k_n \ge 2$

$\frac{1}{k_n} \le \frac{1}{2}$ on inverse l'ordre car la fonction inverse est décroissante sur ℝ⁺ .

$\frac{2}{k_n} \le 1$

$-\frac{2}{k_n} \ge -1$ changement de l'ordre car x -1

$w_n \ge -1$

La suite (w_n) est donc minorée par -1

Exercice 3 :

1) a) $f'(x) = -\frac{1}{90}x + 1{,}25$

$-\frac{1}{90}x + 1{,}25 \geq 0 \iff x \leq 90 \cdot 1{,}25$ ssi $x \leq 112{,}5$

Ainsi sur [0;50] , on a $f'(x) \geq 0$ c'est à dire f croissante

b) $f(x) = x \iff -\frac{1}{180}x^2 + 1{,}25x = x \iff -x^2 + 225x = 180x \iff -x^2 + 45x = 0 \iff$

$x(-x+45) = 0 \iff$ x = 0 ou x = 45

2) a) <u>initialisation :</u> n = 0

$u_0 = 12$

$u_1 = -\frac{1}{180}u_0 + 1{,}25u_0 = -\frac{12^2}{180} + 1{,}25 \cdot 12 = -\frac{12}{15} + 15 = \frac{71}{5} = 14{,}2$

On a donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 45$

SQ il existe n tel que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 45$

DQ $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 45$

On sait que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 45$ or la fonction f est croissante sur [0;50] donc elle conserve l'ordre d'où $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(45)$ or $f(0) = 0$ et $f(45) = 45$ d'où

$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 45$

On termine la récurrence

b) on vient de voir que pour tout n, $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite est croissante

on peut aussi dire qu'elle est bornée par 0 et 45

3) a)

n=0

u=12

while u≤42 :

$\quad u = -\frac{1}{180} \cdot u + 1{,}25 \cdot u$

$\quad$ n = n+1

print(n)

b) La calculatrice donne n = 15 : on a $u_{14} \approx 41{,}9$ et $u_{15} \approx 42{,}6$

donc on dépasse en $2017 + 15 = 2032$