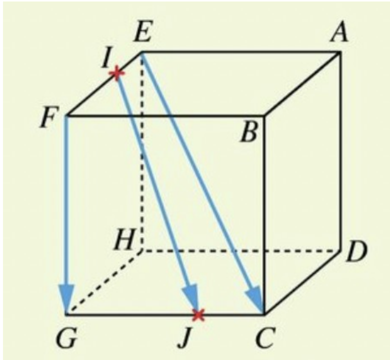
TS Géométrie dans l'espace

Exercice 1 : (Toute trace de recherche sera valorisée)
ABCDEFGH est un cube dessiné ci-contre.



Les points I et J vérifient : $\overrightarrow{EI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$

On veut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont coplanaires.

1) Méthode vectorielle

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$
Conclure

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GJ} &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EG}+\frac{2}{3}\overrightarrow{GC}\\ &= -\frac{1}{3}(\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF})+\overrightarrow{EG}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EC})\\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{EG}-\frac{1}{3}\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{EG}+\frac{2}{3}\overrightarrow{GE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EC}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{FG}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EC}\end{aligned}$$

d'où combinaison linéaire et vecteurs coplanaires

2) Méthode analytique

Le plan est rapporté au repère $(G;\overrightarrow{GC};\overrightarrow{GH};\overrightarrow{GF})$

a) Donner sans justifier les coordonnées des points G , C , H , F , E , I , J

$G(0;0;0)$ $C(1;0;0)$ $H(0;1;0)$ $F(0;0;1)$ $E(0;1;1)$ $I\left(0;\frac{2}{3};1\right)$ $J\left(\frac{2}{3};0;0\right)$

b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$

$\overrightarrow{IJ}(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-1)$, $\overrightarrow{EC}(1;-1;-1)$, $\overrightarrow{FG}(0;0;-1)$

c) Déterminer les valeurs des réels x et y tels que : $\overrightarrow{FG}=x\overrightarrow{IJ}+y\overrightarrow{EC}$

en traduisant l'égalité à l'aide des coordonnées , on obtient : $\begin{cases}\frac{2}{3}x+y=0\\ -\frac{2}{3}x-y=0\\ -x-y=-1\end{cases}$

Les équations L_1 et L_2 étant les mêmes, il vient : $\begin{cases}y=-\frac{2}{3}x\\ x-\frac{2}{3}x=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=3\\ y=-2\end{cases}$

On a donc $\overrightarrow{FG}=3\overrightarrow{IJ}-2\overrightarrow{EC}$

d) Conclure

Il existe une combinaison linéaire entre les trois vecteurs précédents donc ces vecteurs sont coplanaires

Exercice 2 :

On considère un tétraèdre ABCD et les points M , N et P définis par :

$\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

1) Compléter la figure ci-dessous

2) a) Montrer que $\overrightarrow{MP}=3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

b) Exprimer de même le vecteur $\overrightarrow{NP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{-AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AC}$

c) En déduire que les points M , N et P sont alignés

$\overrightarrow{MP} = \frac{3}{2}(2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{NP}$ vecteurs colinéaires donc points alignés