DS Terminale Spécialité math

Mardi 14 décembre 2021

2 heures

Exercice 1 : Déterminer les limites suivantes en détaillant avec soin :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2-7x+1}{x-3}$. $\dfrac{2x^2-7x+1}{x-3} = \dfrac{x\left(2-\dfrac{7}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{1-\dfrac{3}{x}}$ et la limite est facile $-\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x-3}{(x-1)^2}$

$\lim\limits_{x \to 1} e^x-3=e-3<0$ et $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)^2 = 0^+$. donc par quotient la limite vaut $-\infty$

3) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} \sqrt{\dfrac{5}{2-x}} = \sqrt{\dfrac{5}{4}}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & si \quad x>0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

1) Rappeler la définition de la continuité d'une fonction en a

f continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

b) f est-elle continue en 0 ?

f(x) = $\dfrac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \dfrac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{2} = f(0)$ donc f est continue en 0

Exercice 3 :

Parmi les propositions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse

1) **Proposition 1** On sait que pour tout x ∈ $]0;+\infty[$, $f(x) \le \dfrac{2}{x}$. A-t-on alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$?

Faux Contre exemple f(x) = $-x < \dfrac{2}{x}$ sur $]0;+\infty[$ (un positif et un négatif) et la limite vaut $-\infty$

2) **Proposition 2** On sait que pour tout x ∈ $]0;+\infty[$, $2+\dfrac{1}{x} \le f(x) \le 2+\dfrac{4}{x}$.

A-t-on alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$?

VRAI avec un th des gendarmes

3) On donne le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Proposition 3

« L'équation f(x) = 1 admet une unique solution sur ℝ . »

Elément de réponse

f est continue sur ℝ de part le tableau de variation et on a :

$f(]-\infty;0]) = [-1;0]$ et $f([0;+\infty[) = [-1;+\infty[$

Un TVI bien utilisé permet de dire qu'il y a une unique solution sur [0;+∞[mais pas sur]-∞;0]

donc VRAI

4) **Proposition 4** On admet que l'équation $x^3+2x-2=0$ admet une unique solution α sur ℝ .

« Une valeur approchée de α à 10^{-1} prés est 0,7 »

FAUX

La calculatrice donne un encadrement de [0,77;0,78] donc à 10^{-1} près la valeur approchée est 0,8

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=\dfrac{4}{e^x+1}$. C_f est sa courbe représentative .

Partie A

Soit g la fonction définie sur ℝ par g(x)= $g(x)=e^x-xe^x+1$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x(1-x)+1 = -\infty$

2) Etudier les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variations

$g'(x) = e^x-1\times e^x-x\times e^x = -xe^x$

le signe est celui de -x donc

sur ℝ⁻ $g'(x)>0$ donc g croissante et sur ℝ⁺ , $g'(x)<0$ donc g est décroissante

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

3) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur ℝ .

Un th de la bijection classique la solution est dans [0;+∞[et non dans]-∞;0]

b) Donner un encadrement à 10^{-3} près de α

$1,278 < \alpha < 1,279$

4) Démontrer que $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$

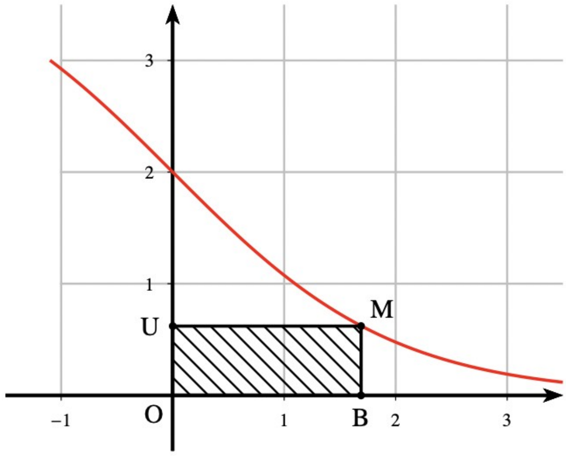
$g(\alpha) = 0$ donc $e^{\alpha} - \alpha e^{\alpha} + 1 = 0$ $\quad e^{\alpha} = \dfrac{-1}{1-\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

5) Etudier le signe de $g(x)$

g est positive sur $]-\infty ; \alpha]$ et négative sur $[\alpha ; +\infty[$

<u>Partie B</u>

On donne la courbe C_f représentative de la fonction f .
Soit M un point de C_f et B et U les projetés orthogonaux de M respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.



1) Soit A la fonction qui à tout x de $\mathbb{R}^*$ associe l'aire du rectangle BOUM

a) Déterminer A(x)

$$A(x) = OB \times BM = x \times f(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$$

b) Démontrer que $A'(x) = \dfrac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$

$$A'(x) = \frac{4 \times (e^x+1) - 4x \times e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{4(e^x + 1 - x e^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$$

c) En déduire les variations de la fonction A

Le signe de A' est celui de g(x) donc d'après la partie A , on a :

sur $]-\infty ; \alpha]$ A' est positive donc A est croissante

sur $[\alpha ; +\infty[$ A' est négative donc A est décroissante

2) Montrer que l'aire du rectangle BOUM est maximale lorsque M a pour abscisse α

A est croissante puis décroissante donc maximum en α

Déterminer un encadrement de cette aire maximale à l'aide de la partie A

$$A(\alpha) = \frac{4\alpha}{e^{\alpha} + 1}$$

On sait que $1{,}278 < \alpha < 1{,}279$ donc $5{,}112 < 4\alpha < 5{,}116$

$e^{1{,}278} + 1 < e^{\alpha} + 1 < e^{1{,}279} + 1$ donc par inverse $\dfrac{1}{e^{1{,}279}+1} < \dfrac{1}{e^{\alpha}+1} < \dfrac{1}{e^{1{,}278}+1}$ (à noter le changement de bornes)

les inégalités étant positives, on peut les multiplier : $\dfrac{5{,}112}{e^{1{,}279}+1} < A(\alpha) < \dfrac{5{,}116}{e^{1{,}278}+1}$ soit

$1{,}113 < A(\alpha) < 1{,}114$

3) Démontrer que la tangente à C_f au point d'abscisse α est parallèle à la droite (BU)

f(x) = $\dfrac{4}{e^x+1}$ donc $f'(x) = -\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

coef directeur de la tangente à Cf : $f'(\alpha) = -\dfrac{4e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2}$

coef directeur de la droite (BU) = $\dfrac{y_B - y_U}{x_B - x_U} = \dfrac{0 - f(\alpha)}{\alpha - 0} = -\dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = -\dfrac{4}{\alpha(e^\alpha+1)}$

Or on sait que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$ donc $e^\alpha + 1 = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$ d'où

$$-\frac{4e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2} = -\frac{\dfrac{4}{\alpha-1}}{\dfrac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}} = -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$$

$$-\frac{4}{\alpha(e^\alpha+1)} = -\frac{4}{\alpha\times\dfrac{\alpha}{\alpha-1}} = -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$$

Les coefficients directeurs sont égaux donc les droites sont parallèles