DS Terminale Spécialité math

Mardi 14 décembre 2021

2 heures

Exercice 1 : Déterminer les limites suivantes en détaillant avec soin :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2-7x+1}{x-3}$ 2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x-3}{(x-1)^2}$ 3) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} \sqrt{\dfrac{5}{2-x}}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur [0;+∞[par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & si \quad x>0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

1) Rappeler la définition de la continuité d'une fonction en a

b) f est-elle continue en 0 ?

Exercice 3 :

Parmi les propositions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse

1) **Proposition 1** On sait que pour tout x ∈]0;+∞[, $f(x) \leq \dfrac{2}{x}$. A-t-on alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$?

2) **Proposition 2** On sait que pour tout x ∈]0;+∞[, $2+\dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq 2+\dfrac{4}{x}$.

A-t-on alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$?

3) On donne le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Proposition 3

« L'équation f(x) = 1 admet une unique solution sur ℝ . »

4) **Proposition 4** On admet que l'équation $x^3+2x-2=0$ admet une unique solution α sur ℝ .

« Une valeur approchée de α à 10^{-1} prés est 0,7 »

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{4}{e^x+1}$. C_f est sa courbe représentative .

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par g(x)= $g(x)=e^x-x\,e^x+1$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) Etudier les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variations

3) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

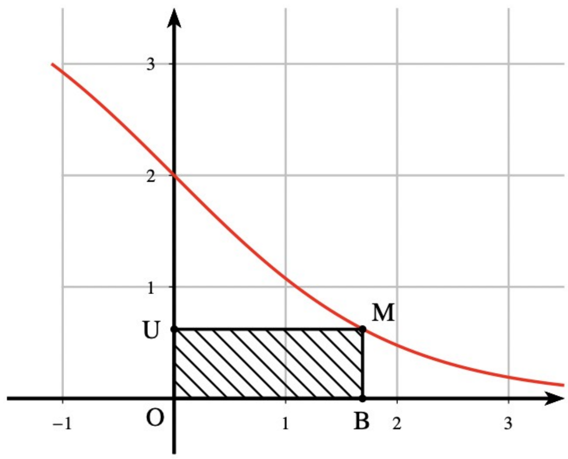
b) Donner un encadrement à 10^{-3} près de α

4) Démontrer que $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$

5) Etudier le signe de $g(x)$

Partie B

On donne la courbe C_f représentative de la fonction f . Soit M un point de C_f et B et U les projetés orthogonaux de M respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.



1) Soit A la fonction qui à tout x de $\mathbb{R}^*_-$ associe l'aire du rectangle BOUM

a) Déterminer A(x)

b) Démontrer que $A'(x)=\dfrac{4\,g(x)}{(e^x+1)^2}$

c) En déduire les variations de la fonction A

2) Montrer que l'aire du rectangle BOUM est maximale lorsque M a pour abscisse α

Déterminer un encadrement de cette aire maximale à l'aide de la partie A

3) Démontrer que la tangente à C_f au point d'abscisse α est parallèle à la droite (BU)