DM Espace

Dans ce devoir, on se place dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

Exercice 1 : On considère les points $A(-4;2;3)$, $B(1;5;2)$, $C(0;5;4)$ et $D(-6;-1;-2)$

1) Démontrer que A , B et C définissent un plan

$\overrightarrow{AB}$ $(5;3;-1)$ et $\overrightarrow{AC}$ $(4;3;1)$

$\frac{5}{4} \neq \frac{3}{3}$ donc les coordonnées ne sont pas proportionnelles et les vecteurs non colinéaires d'où les points définissent un plan

2) Déterminer s'ils existent, les réels a et b tels que $\overrightarrow{AD}=a\,\overrightarrow{AB}+b\,\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD}$ $(-2;-3;-5)$ $a\,\overrightarrow{AB}+b\,\overrightarrow{AC}$ $(5a+4b;3a+3b;-a+b)$

Pour l'égalité, il vient : $\begin{cases} 5a+4b=-2 \\ 3a+3b=-3 \\ -a+b=-5 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$

3) Que peut-on en déduire ?

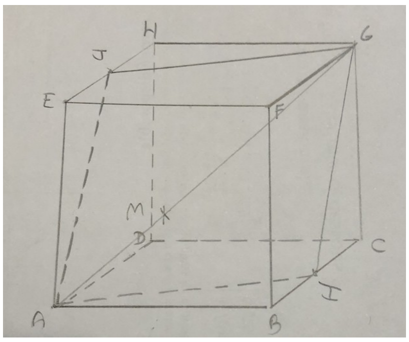
Combinaison linéaire donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc coplanaires donc les points aussi

Exercice 2 : ABCDEFGH est un cube et I et J sont les milieux respectifs de [BC] et [EH]. Le point M est un point du segment [AG] distinct de A et de G .

1) Justifier qu'il existe un réel t ∈]0;1[tel que $\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AG}$

Quand M est en A , $\overrightarrow{AM} = 0\,\overrightarrow{AG}$ et quand M est en G , $\overrightarrow{AM}=1\,\overrightarrow{AG}$ donc comme M est distinct de A et G , t ∈]0;1[

2) Construire la section du cube par le plan (IAM) . (on placera M tel que t = $\frac{1}{3}$ et on prendra 5 cm pour le côté du cube)



M étant sur la droite (AG) , le plan (IAM) = le plan (IAG) donc on peut commencer par tracer [AI] et [IG] puis ce plan (IAM) coupe les plans parallèles (ADHE) et BCGF) selon deux droites parallèles donc on trace la parallèle à (IG) passant par A . Cette parallèle coupe (EH) en J.

La section est donc le parallélogramme AJGI

Dans la suite, on pourra se placer dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$)

3) Existe-t-il une valeur de t pour laquelle les points J , M et I sont alignés ?

$J\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ $I\left(1;\frac{1}{2};0\right)$ $G(1;1;1)$ donc $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$ d'où $t\,\overrightarrow{AG}(t;t;t)$ d'où $M(t;t;t)$

on a alors $\overrightarrow{IM}$ $\left(t-1;t-\frac{1}{2};t\right)$ et $\overrightarrow{IJ}$ $(-1;0;1)$

Si les points sont alignés, il existe k tel que $\overrightarrow{IM}=k\,\overrightarrow{IJ}$ d'où $\begin{cases} t-1=-k \\ t-\frac{1}{2}=0 \\ t=k \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ k=\frac{1}{2} \end{cases}$

4) Existe-t-il une valeur de t pour laquelle les points H , M et I soient alignés ?

$H(0;1;1)$ $\quad I\left(1;\frac{1}{2};0\right)$ $\quad M(t;t;t)$

$\overrightarrow{IH}\left(-1;\frac{1}{2};1\right)$ et $\overrightarrow{HM}(t;t-1;t-1)$ d'où comme précédemment

$\begin{cases} t=-k \\ t-1=\frac{k}{2} \\ t-1=k \end{cases}$ $\quad \begin{cases} t=-k \\ -k-1=\frac{k}{2} \\ -k-1=k \end{cases}$ $\quad \begin{cases} t=-k \\ k=-\frac{2}{3} \\ k=\frac{1}{2} \end{cases}$

k n'est pas unique donc impossible d'avoir les points alignés

<u>**Exercice 3 :**</u>

On considère un cube ABCDEFGH et les points M et N définis par :

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\frac{2}{3}\overrightarrow{FG}$

1) Faire une figure.

2) Démontrer que les points C , E et M sont alignés

$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ or $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ d'où

$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right)$

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$ d'où $\overrightarrow{CM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$ d'où vecteurs colinéaires et points alignés

3) Démontrer que les points E , F , H et N sont coplanaires

Il faut démontrer qu'il existe une combinaison linéaire entre les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{EN}$.

$\overrightarrow{EN}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\frac{2}{3}\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$

d'où la réponse