DM2 Terminale Spécialité

Exercice 1: Etudier la convexité des deux fonctions proposées

1) f est définie sur [0;10] par $f(x)=\dfrac{1}{e^{-0,6}+e^{4,5-x}}$

on étudie le signe de la dérivée seconde :

$f'(x)=\dfrac{--e^{4,5-x}}{(e^{-0,6}+e^{4,5-x})^2} = \dfrac{e^{4,5-x}}{(e^{-0,6}+e^{4,5-x})^2}$

$f''(x)=\dfrac{-e^{4,5-x}\cdot(e^{-0,6}+e^{4,5-x})^2-e^{4,5-x}\cdot 2\cdot(-e^{4,5-x})\cdot(e^{-0,6}+e^{4,5-x})}{((e^{-0,6}+e^{4,5-x})^2)^2}$

$= \dfrac{(e^{-0,6}+e^{4,5-x})\cdot e^{4,5-x}(-(e^{-0,6}+e^{4,5-x})+2e^{4,5-x})}{(e^{-0,6}+e^{4,5-x})^4} = \dfrac{(e^{-0,6}+e^{4,5-x})\cdot e^{4,5-x}(-e^{-0,6}+e^{4,5-x})}{(e^{-0,6}+e^{4,5-x})^4}$

le signe de f'' dépend alors de $-e^{-0,6}+e^{4,5-x}$

$-e^{-0,6}+e^{4,5-x} > 0$

$e^{4,5-x}>e^{-0,6}$

$4,5-x>-0,6$

$x<5,1$

pour tout x ∈ [0;5,1[, $f''(x)>0$ donc f est convexe

pour tout x ∈]5,1;10], $f''(x)<0$ donc f est concave

pour x = 5,1 , f'' s'annule en changeant de signe donc la courbe admet un point d'inflexion

2) g est définie sur ℝ par $g(x)=xe^{-x^2}$

$g'(x)=1\cdot e^{-x^2}+x\cdot(-2xe^{-x^2}) = (1-2x^2)e^{-x^2}$

$g''(x)=-4x\cdot e^{-x^2}+(1-2x^2)\cdot(-2xe^{-x^2}) = e^{-x^2}\cdot x\cdot(-4-2+4x^2) = xe^{-x^2}(-6+4x^2)$

e^{-x^2} est positif donc le signe de g'' est celui de $x(-6+4x^2)$

$-6+4x^2=0$ ssi $x^2=\dfrac{6}{4}$ ssi $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

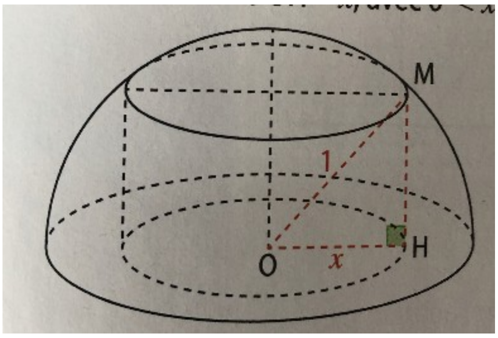
x	-∞		$\frac{-\sqrt{6}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{2}$		+∞
Signe de x		–		–	0	+		+	
Signe de $-6+4x^2$		+	0	–		–	0	+	
Signe de g''		–	0	+	0	–	0	+	
convexité		Concave	Pt	convexe	pt	Concave	Pt	convexe	

Pt est mis pour point d'inflexion

Exercice 2:

On considère un cylindre droit dans une demi-sphère de rayon 1 mètre. Le cylindre et la sphère ont le même plan P de base et le même axe de symétrie. Soit M un point de l'intersection de la sphère et du cylindre et H le projeté orthogonal de M sur le plan P.

L'unité est le mètre . On note OH = x avec 0 < x < 1



1) Déterminer, en fonction de x, le volume V du cylindre

V = aire de base * hauteur = $\pi \cdot x^2 \cdot MH$

Le th de Pythagore donne MH = $\sqrt{1-x^2}$ donc $V=\pi \cdot x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}$

2) a) Etudier les variations de la fonction V définie à la question 1)

$$V'(x)=\pi \cdot 2x \cdot \sqrt{1-x^2}+\pi \cdot x^2 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{4\cdot \pi x \cdot (1-x^2)-2\cdot \pi \cdot x^3}{2\sqrt{1-x^2}} = 2\cdot \pi \cdot x \frac{2-3x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$$

Le signe de V' est celui de $2-3x^2$ car on travaille sur [0;1]

$2-3x^2=0$ ssi $x^2=\frac{2}{3}$ ssi $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ d'où en tenant compte du domaine de définition [0;1] , il vient :

pour tout x ∈ $\left[0;\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$, V' est positive et V croissante

pour tout x ∈ $\left[\sqrt{\frac{2}{3}};1\right]$, V' est négative et V décroissante

b) En déduire les dimensions MH et OH du cylindre de plus grand volume ainsi que la valeur exacte en m^3 de ce volume

La fonction étant croissante puis décroissante, elle admet un maximum en x = OH = $\sqrt{\frac{2}{3}}$ d'où

MH = $\sqrt{1-\frac{2}{3}}$ = $\sqrt{\frac{1}{3}}$

On a alors V = $\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$ = $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

3) On souhaite déterminer la plus petite valeur de OH à 0,001 près pour laquelle le volume du cylindre dépasse 1 m^3 . Ecrire un algorithme permettant de répondre à la question et donner cette valeur de OH

def seuil( ):
x=0
V=0
while V<1 :
x=x+0,001
$V=\pi \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2}$
return x

```
from math import *
def seuil():
    x=0
    V=0
    while V<1:
        x=x+0.001
        V=pi*(x**2)*sqrt(1-x**2)
    return x
```

En cours d'exécution: essai.py

```
>>> seuil()
0.6460000000000005
>>>
```

<u>Exercice 3 :</u>

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=10x^2\mathrm{e}^{nx-1}$ où n est un entier naturel non nul

On note C_n la courbe représentative de f .

Montrer que C_n admet deux points d'inflexion

On calcule f''

$f'(x)=20x\mathrm{e}^{nx-1}+10x^2\cdot n\,\mathrm{e}^{nx-1} = (20x+10nx^2)\mathrm{e}^{nx-1}$

$f''(x)=(20+20nx)\mathrm{e}^{nx-1}+(20x+10nx^2)\cdot n\,\mathrm{e}^{nx-1}$

$f''(x)=(20+20nx+20nx+10n^2x^2)\mathrm{e}^{nx-1}$

$f''(x)=10(2+4nx+n^2x^2)\mathrm{e}^{nx-1}$

Le signe de f'' est celui de $2+4nx+n^2x^2$. Ainsi , f'' s'annulera deux fois en changeant de signe si ce polynôme admet deux racines distinctes:

$\Delta = 16n^2-4\cdot2\cdot n^2 = 8n^2$

Ainsi pour n > 0 , ce Δ est strictement positif donc f'' s'annule alors en changeant de signe et C_f admet deux point d'inflexion