67 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. a. Déterminer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées au centième près.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n+3$.

b. Sans utiliser de raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n).$$

En déduire une validation de la conjecture.

3. On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n.$$

c. Refaire une démonstration de la croissance de la suite (u_n) à partir de la formule que l'on vient d'obtenir.

1) a)

$$u_1 = \frac{2}{3}u_0 + \frac{1}{3}\cdot 0 + 1 \;=\; \frac{7}{3}$$

$$u_2 = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}\cdot 1 + 1 \;=\; \frac{26}{9}$$

$$u_3 = \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3}\cdot 2 + 1 \;=\; \frac{97}{27}$$

$$u_4 = .. = \frac{356}{81}$$

b) La suite semble croissante

2) a)

<u>**Initialisation :**</u> n = 0

$u_0 = 2$ et $n+3 = 3$

$u_0 \leq 3$

la relation est vraie au rang 0

Supposons qu'il existe un entier n tel que $u_n \leq n+3$

Démontrons que $u_{n+1} \leq n+4$

$$u_n \leq n+3$$

$$\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}(n+3)$$

$$\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}n+2$$

$$\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n + 1$$

$$u_{n+1} \leq n+3 \;\leq\; n+4$$

La relation est donc héréditaire or elle est vraie au rang 0 donc elle est vraie pour tout n $\in \mathbb{N}$.

b)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n$$

$$= -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$$

$$= \frac{1}{3}(-u_n + n + 3)$$

$$= \frac{1}{3}(n+3-u_n)$$

Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$

Le signe est celui de $n+3-u_n$ or on vient de démontrer que pour tout n , $u_n \leq n+3$ donc $n+3-u_n$ est positif ce $u_{n+1} - u_n \geq 0$ c'est à dire $u_{n+1} \geq u_n$.

La suite est donc croissante

3) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) \;=\; \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 \;=\; \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n \;=\; \frac{2}{3}(u_n - n) \;=\; \frac{2}{3}v_n$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{2}{3}$ de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = u_0 = 2$

b) On a donc $v_n = v_0 \cdot q^n \;=\; 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ce qui donne $u_n - n = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$ d'où $u_n = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

c) Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + n + 1 - 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n - n \;=\; 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3} - 1\right) + 1 \;=\; 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

On peut alors conjecturer à la calculatrice que le signe est positif et démontrer ce résultat par récurrence : Démontrons que $1 - (2/3)^{n+1}$ est positif pour tout entier n initialisation : n = 0

$1-\left(\frac{2}{3}\right)^0+1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\geq 0$. La relation est vraie au rang 0

SQ il existe n tel que $1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\geq 0$

DQ $1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\geq 0$

On sait que $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\leq 1$ donc $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\leq 1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)$ c'est à dire $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\leq\frac{2}{3}\leq 1$

d'où $1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\geq 0$

La relation est donc héréditaire ....

On a donc $u_{n+1}-u_n\geq 0$ cad $u_{n+1}\geq u_n$ et la suite est croissante

51 Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{{u_n}^2+1}}$.

1. Calculer la valeur exacte de u_1, u_2, u_3 et u_4.

2. Quelle conjecture peut-on faire quant à la formule explicite de u_n ?

3. Démontrer la conjecture.

1) $u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $u_2=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $u_3=\ldots=\frac{1}{\sqrt{4}}$ $u_4=\ldots=\frac{1}{\sqrt{5}}$

2) il semble que $u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

3) Initialisation : $\frac{1}{\sqrt{0+1}}=1=u_0$ relation vraie au rang 0

SQ il existe n tel que $u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ et DQ $u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+2}}$

$$u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{1}{n+1}+1}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

CQFD