

1) a)

$$u_1 = \frac{2}{3}u_0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + 1 = \frac{7}{3}$$

$$u_2 = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3} \cdot 1 + 1 = \frac{26}{9}$$

$$u_3 = \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3} \cdot 2 + 1 = \frac{97}{27}$$

$$u_4 = \dots = \frac{356}{81}$$

b) La suite semble croissante

2) a)

Initialisation : $n = 0$

$$u_0 = 2 \text{ et } n+3 = 3$$

$$u_0 \leq 3$$

la relation est vraie au rang 0

Supposons qu'il existe un entier n tel que $u_n \leq n+3$

Démontrons que $u_{n+1} \leq n+4$

$$u_n \leq n+3$$

$$\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}(n+3)$$

$$\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}n+2$$

$$\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n+1 \leq \frac{2}{3}n+2 + \frac{1}{3}n+1$$

$$u_{n+1} \leq n+3 \leq n+4$$

La relation est donc héréditaire or elle est vraie au rang 0 donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n+1 - u_n$

$$= -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n+1$$

$$= \frac{1}{3}(-u_n + n+3)$$

$$= \frac{1}{3}(n+3 - u_n)$$

Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$

Le signe est celui de $n+3 - u_n$ or on vient de démontrer que pour tout n , $u_n \leq n+3$ donc

$n+3 - u_n$ est positif ce $u_{n+1} - u_n \geq 0$ c'est à dire $u_{n+1} \geq u_n$.

La suite est donc croissante

3) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n+1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{2}{3}$ de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = u_0 = 2$

b) On a donc $v_n = v_0 \cdot q^n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ce qui donne $u_n - n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ d'où $u_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

c) Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + n+1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3} - 1\right) + 1 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

On peut alors conjecturer à la calculatrice que le signe est positif et démontrer ce résultat par récurrence : Démontrons que $1 - (2/3)^{n+1}$ est positif pour tout entier n

67 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. a. Déterminer u_1, u_2, u_3 et u_4 . On pourra en donner des valeurs approchées au centième près.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) .

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq n+3$.

b. Sans utiliser de raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3 - u_n).$$

En déduire une validation de la conjecture.

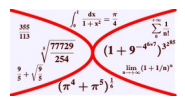
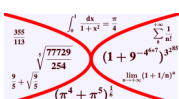
3. On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. En déduire une expression de v_n en fonction de n , puis montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n.$$

c. Refaire une démonstration de la croissance de la suite (u_n) à partir de la formule que l'on vient d'obtenir.



initialisation : $n = 0$

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^0 + 1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \geq 0. \text{ La relation est vraie au rang } 0$$

SQ il existe n tel que $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \geq 0$

$$\text{DQ } 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} \geq 0$$

On sait que $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \leq 1$ donc $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \leq 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ c'est à dire $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} \leq \frac{2}{3} \leq 1$

$$\text{d'où } 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} \geq 0$$

La relation est donc héréditaire

On a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ cad $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite est croissante

51 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier

$$\text{naturel } n, u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}.$$

1. Calculer la valeur exacte de u_1, u_2, u_3 et u_4 .
2. Quelle conjecture peut-on faire quant à la formule explicite de u_n ?
3. Démontrer la conjecture.

$$1) \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad u_2 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad u_3 = \dots = \frac{1}{\sqrt{4}} \quad u_4 = \dots = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2) \text{ il semble que } u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$3) \text{ Initialisation : } \frac{1}{\sqrt{0+1}} = 1 = u_0 \text{ relation vraie au rang } 0$$

$$\text{SQ il existe } n \text{ tel que } u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \text{et DQ } u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{1}{n+1} + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

CQFD

