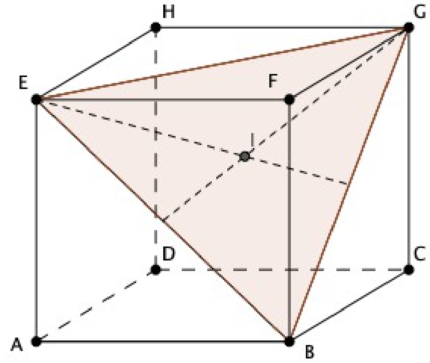
Interrogation Terminale

3 février 2021

Exercice 1 :



ABCDEFGH est un cube d'arête 1. On munit l'espace du repère orthonormé (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$)

a) Déterminer les coordonnées des points B , E , G , F

$B(1;0;0)\quad E(0;0;1)\quad G(1;1;1)\quad F(1;0;1)$

b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EG}$

$\overrightarrow{EB}\ (1;0;-1)$ et $\overrightarrow{EG}\ (1;1;0)$

c) On admet que le point d'intersection I des médiatrices du triangle EGB vérifie l'égalité : $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Démontrer que I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

Soit $(x;y;z)$ les coordonnées de I. L'égalité $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ devient en coordonnées :

$$\begin{pmatrix}-x\\-y\\1-z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-x\\1-y\\1-z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-x\\-y\\-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ d'où le système : $\begin{cases}-x+1-x+1-x=0\\-y+1-y-y=0\\1-z+1-z-z=0\end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\y=\frac{1}{3}\\z=\frac{2}{3}\end{cases}$

d) Démontrer que I est le projeté orthogonal du point F sur le plan (EGB)

Si I est le projeté orthogonal de F sur le plan (EBG) le vecteur $\overrightarrow{FI}$ est normal à ce plan il faut donc vérifier que $\overrightarrow{IF}$ est orthogonal à deux vecteurs de ce plan par exemple $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EG}$ dont les coordonnées ont été calculées en a) .

$\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{-1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{IF}\cdot\overrightarrow{EB}=\frac{1}{3}\times1+\left(\frac{-1}{3}\right)\times0+(-1)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$

$$\overrightarrow{IF}\cdot\overrightarrow{EG}=\frac{1}{3}\times1+\left(\frac{-1}{3}\right)\times1+0\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$$

$\overrightarrow{IF}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EBG) donc $\overrightarrow{IF}$ est normal à ce plan et comme I est dans ce plan , c'est le projeté orthogonal de F dans ce plan

e) Déterminer la distance du point F au plan (EBG)

Il faut calculer la distance FI = $\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice 2 :

On se place dans un repère orthonormé.

On considère un plan P de base ($\vec{u}$; $\vec{v}$) tel que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$ et un plan Q de vecteur normal $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}2\\8\\1\end{pmatrix}$.

1) On note $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ (avec a , b et c réels) un vecteur normal au plan P.

a) Montrer que les coordonnées de $\vec{n}$ vérifient le système suivant : $\begin{cases}a-2b+5c=0\\4b-3c=0\end{cases}$

$\vec{n}$ est un vecteur normal de P donc $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs de la base de P d'où :

$\vec{n}\cdot\vec{u}$ = 0 et $\vec{n}\cdot\vec{v}$ = 0 ce qui donne avec les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le système $\begin{cases}a-2b+5c=0\\4b-3c=0\end{cases}$

b) Montrer que ce système est équivalent au système suivant : $\begin{cases}a=-\dfrac{7}{2}c\\b=\dfrac{3}{4}c\end{cases}$

De $4b-3c=0$, on extrait b = $\frac{3}{4}c$ et en remplaçant dans l'autre équation, on trouve

$a-2\times\frac{3}{4}c+5c=0$ ce qui donne $a=-\frac{7}{2}c$

c) Donner alors un vecteur normal de coordonnées entières au plan P

En prenant c = 4 , le système précédent devient $\begin{cases}a=-14\\b=3\\c=4\end{cases}$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}-14\\3\\4\end{pmatrix}$ est normal au plan P

2) Que peut-on en déduire sur la position relative des plans P et Q ?

Etudier la position relative de deux plans revient à étudier leurs vecteurs normaux :

$\vec{n}\begin{pmatrix}-14\\3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}2\\8\\1\end{pmatrix}$ $\frac{x_{\vec{n}}}{x_{\overrightarrow{n'}}}$ = -7 ≠ $\frac{y_{\vec{n}}}{y_{\overrightarrow{n'}}}$ = $\frac{3}{8}$ donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires d'où les plans ne sont pas parallèles , ils sont donc sécants.

De plus, on constate que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{n'}$ = $-28+24+4=0$ donc les vecteurs normaux sont orthogonaux et les plans sont perpendiculaires

Exercice 3 :

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $\mathrm{M}(1;-1;-1)$, $\mathrm{N}(0;3;4)$ et $\mathrm{P}(2;0;2)$.

Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ de deux façons et en déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{\mathrm{PMN}}$.

1. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP} = -1+4+15=18$

2. $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP} = MN\times MP\times\cos(PMN)$. On a $MN=\sqrt{(-1)^2+4^2+5^2} = \sqrt{42}$ et

   $MP=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$ d'où $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP} = \sqrt{42}\times\sqrt{11}\times\cos(PMN) = \sqrt{462}\cos(PMN)$

3. On en déduit donc la valeur de $\cos(PMN)=\dfrac{18}{\sqrt{462}}$ d'où $\widehat{PMN} \approx 33{,}1°$

Exercice 4 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) . On donne les points $A(1;0;-1)$, $B(1;2;3)$, $C(-5;5;0)$ et $D(11;1;-2)$

Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD]

Le point K est défini par $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

a) Déterminer les coordonnées des points I , J , K

La formule du milieu donne : $I(1;1;1)$, $J(3;3;-1)$.

$\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-3\end{pmatrix}$ et $\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ d'où $\begin{cases}x-1=-2\\y-2=1\\z-3=-1\end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases}x=-1\\y=3\\z=2\end{cases}$ K $(-1;3;2)$

b) Démontrer que les points I , J , K définissent un plan

Il faut prouver que I , J , K ne sont pas alignés cad les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$. Le quotient des abscisses vaut -1 alors que le quotient des ordonnées vaut 1

donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires et les points forment un plan

c) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(3;1;4)$ est un vecteur normal au plan (IJK)

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{IJ} = 3\times2+1\times2+4\times(-2) = 6+2-8 = 0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{IK} = 3\times(-2)+1\times2+4\times1 = -6+2+4 = 0$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) donc $\vec{n}$ est normal à ce plan

d) Démontrer que le plan (IJK) et la droite (BD) sont sécants

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}10\\-1\\-5\end{pmatrix}$

Si (BD) est parallèle au plan (IJK) alors $\overrightarrow{BD}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux .

$\overrightarrow{BD}\cdot\vec{n} = 10\times3+(-1)\times1+(-5)\times4 = 30-1-20 = 9 \neq 0$ donc les vecteurs ne sont pas orthogonaux et la droite est sécante au plan