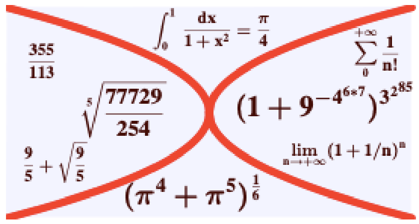
<u>DS Espace Terminale Spécialité mathématique</u>

<u>18 février 2021</u>



<u>Exercice 1 :</u>

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point A.
On considère les points :

$$B(10;-8;2) \qquad C(-1;-8;5) \qquad D(14;4;8)$$

1) a) Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD)

$\overrightarrow{AB}\ (10;-8;2)$ et $\overrightarrow{CD}\ (15;12;3)$ d'où les représentations paramétriques :

(AB) : $\begin{cases} x=10t \\ y=-8t \\ z=2t \end{cases}$ avec t ∈ ℝ .   (CD) : $\begin{cases} x=-1+15t' \\ y=-8+12t' \\ z=5+3t' \end{cases}$ avec t' ∈ ℝ .

b) Vérifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites ne sont pas parallèles.

Existe-t-il un couple unique $(t;t')$ tel que $\begin{cases} 10t=-1+15t' \\ -8t=-8+12t' \\ 2t=5+3t' \end{cases}$?

On a L_3: $t=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}t'$ d'où en remplaçant dans les deux autres équations :

$$L_1 \ : \ 10\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}t'\right)=-1+15t'$$

$$25+15t'=-1+15t'$$

$$25=-1 \quad \text{IMPOSSIBLE}$$

Donc t' n'existe pas et les droites ne sont donc pas sécantes d'où comme elles ne sont pas parallèles, elles sont non coplanaires

2) On considère le point I de la droite (AB) d'abscisse 5 et le point J de la droite (CD) d'abscisse 4

a) Déterminer les coordonnées des points I et J et en déduire la distance IJ

$x_I=5=10t$ donc t = $\frac{1}{2}$ ce qui donne alors $I(5;-4;1)$

$x_J=4=-1+15t'$ donc $t'=\frac{1}{3}$ ce qui donne alors $J(4;-4;6)$

$\overrightarrow{IJ}\ (-1;0;5)$ donc $IJ=\sqrt{(-1)^2+0^2+5^2} = \sqrt{26}$

b) Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD)

$$\overrightarrow{AB}\ (10;-8;2) \quad , \quad \overrightarrow{CD}\ (15;12;3) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IJ}\ (-1;0;5)$$

$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB} = 10\times(-1)+(-8)\times0+2\times5 = -10+10 = 0$

$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{CD} = 15\times(-1)+12\times0+3\times5 = -15+15 = 0$

d'où la réponse

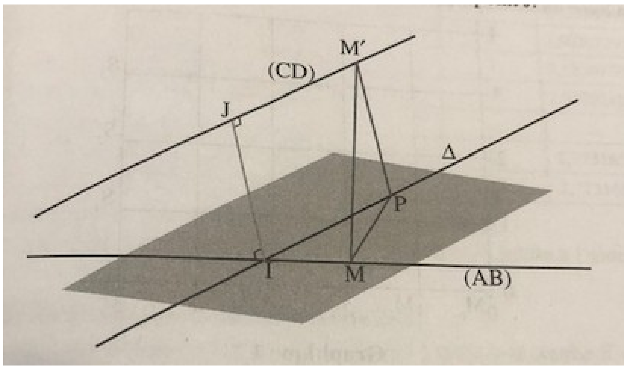
La droite (IJ) est appelée perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD)

3) Cette question a pour but de vérifier que la distance (IJ) est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD)

Sur le schéma ci-après, on a représenté les droites (AB) et (CD) les points I et J et la droite Δ parallèle à la droite (CD) passant par I

On considère un point M de la droite (AB) distinct du point I

On considère un point M' de la droite (CD) distinct du point J



a) Justifier que la parallèle à la droite (IJ) passant par le point M' coupe la droite Δ en un point que l'on notera P.

Les droites (CD) et Δ sont parallèles donc coplanaires donc les droites (IJ) Δ et le point M' sont dans un même plan . Comme (IJ) est sécante à Δ en I, la parallèle à (IJ) passant par M' est donc aussi sécante à Δ en un point P

b) Démontrer que le triangle MPM' est rectangle en P

On sait que si deux droites sont parallèles alors toutes droites perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre d'où :

- (IJ) // (M'P) et (IJ) $\perp \Delta$ donc (M'P) $\perp \Delta$
- (IJ) // (M'P) et (IJ) $\perp$ (AB) donc (M'P) $\perp$ (AB)

La droite (M'P) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan formé par les deux droites sécantes Δ et (AB) donc (M'P) est orthogonale à ce plan . (M'P) est alors orthogonale à toute droite de ce plan , en particulier (M'P) $\perp$ (MP) d'où le triangle rectangle

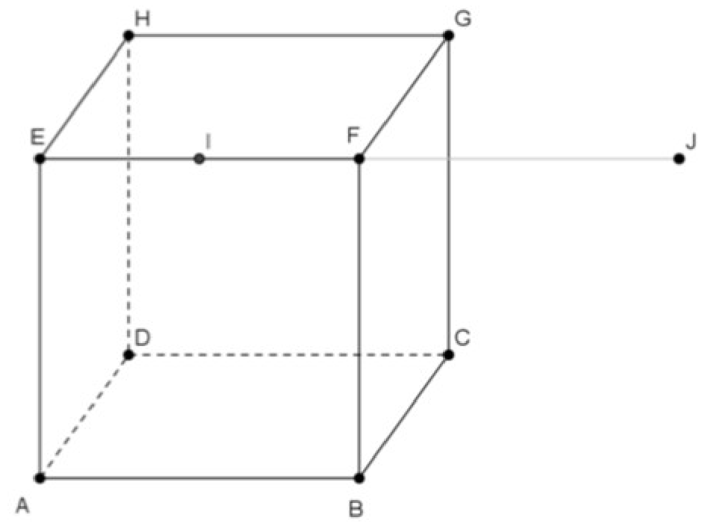
c) Justifier que $MM'>IJ$ et conclure

Dans le triangle rectangle M'MP, l'hypoténuse est le côté le plus long donc $MM'>M'P$ or on a $M'P=IJ$ d'où $M'P>IJ$ ce qui prouve bien que la plus courte distance entre deux points quelconque de (AB) et (CD) est la distance IJ

Exercice 2

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AE}\ )$.



1. a. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points I et J.

$$I\left(\frac{1}{2};0;1\right) \quad \text{et} \quad J(2;0;1).$$

b. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.

On a $D(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ et $G(1;1;1)$ donc

$\overrightarrow{DJ}\ (2;-1;1)$ $\quad\overrightarrow{BI}\ \left(-\frac{1}{2};0;1\right)$ $\quad\overrightarrow{BG}\ (0;1;1)$

c. Montrer que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

$\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI} = ... = 0$ et $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG} = ... = 0$ donc $\overrightarrow{DJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI) donc $\overrightarrow{DJ}$ est orthogonal à ce plan , c'est donc un vecteur normal à ce plan

d. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.

$\overrightarrow{DJ}$ est normal au plan (BGI) donc ce plan a une équation de la forme : $2x-y+z+d=0$

$B \in$ (BGI) donc $2x_B-y_B+z_B+d=0$ ce qui donne $d = -2$ d'où l'équation

2. On note Δ la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

$\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur directeur de Δ et $F(1;0;1)$ donc Δ : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \\ z=1+t \end{cases}$

b. On appelle L le point d'intersection de la droite Δ et du plan (BGI).

Déterminer les coordonnées du point L

L $\in$ Δ donc $L(1+2t;-t;1+t)$ et L $\in$ (BGI) donc :

$$2x_L - y_L + z_L - 2 = 0$$

$$2(1+2t)-(-t)+1+t-2=0$$

$$t = \frac{-1}{6}$$

d'où $L\left(1+2\times\left(\frac{-1}{6}\right);-\left(\frac{-1}{6}\right);1+\left(\frac{-1}{6}\right)\right)$

$L\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$

Pour la suite de cet exercice, on prendra le point L de coordonnées ($\frac{2}{3}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{5}{6}$).

3. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V=\frac{1}{3}\times B\times h$

où B est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

a. Calculer le volume de la pyramide FBGI.

Prenons pour base le triangle rectangle (FGI) d'aire $\frac{FG\times FI}{2} = \frac{1}{4}$

La hauteur de la pyramide est alors FB=1 donc le volume de la pyramide est $V = \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times 1 = \frac{1}{12}$

b. En déduire l'aire du triangle BGI.

Si on calcule le volume de la pyramide avec pour base le triangle BGI, la hauteur est alors FL et on a donc $V=\frac{1}{3}\times aire(BGI)\times FL$

$L\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$ et $F(1;0;1)$ donc $\overrightarrow{FL}\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{6};-\frac{1}{6}\right)$

$FL=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{36}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ d'où $V=\frac{1}{3}\times aire(BGI)\times FL$ devient

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\times aire(BGI)\times\frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{aire(BGI)\times\sqrt{6}}{18}$$

$$\text{aire(BGI)} = \frac{1}{12}\times\frac{18}{\sqrt{6}} = \frac{3}{2\times\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$