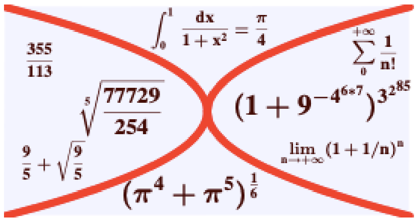

DS Equations différentielles Terminale Spé

Jeudi 14 Janvier 2021

Exercice 1 : Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x)=14x^6-x^4+3$

F(x) = $\frac{14}{7}x^7-\frac{x^5}{5}+3x+c$ = $2x^7-\frac{x^5}{5}+3x+c$ avec c ∈ ℝ .

b) f(x) = $\frac{x^2+3}{\sqrt{x^3+9x}}$ = $\frac{1}{3}\times\frac{3(x^2+3)}{\sqrt{x^3+9x}}$

Soit $u(x)=x^3+9x$ alors $u'(x)=3x^2+9=3(x^2+3)$

f est donc de la forme $\frac{1}{3}\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$. Une primitive de f est donc $\frac{1}{3}2\sqrt{u}$

$F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3+9x}$ + c avec c ∈ ℝ

c) $f(x)=\frac{e^{3x}}{2+e^{3x}}$ = $\frac{1}{3}\times\frac{3e^{3x}}{2+e^{3x}}$

Soit $u(x)=2+e^{3x}$ on a alors $u'(x)=3e^{3x}$

f est donc de la forme $\frac{1}{3}\times\frac{u'}{u}$. Une primitive de f s'écrit donc $\frac{1}{3}\ln(u)$

$F(x)=\frac{1}{3}\ln(2+e^{3x})$ +c avec c ∈ ℝ

d) $f(x)=\frac{7x^6-8}{x^2}$ = $7x^4-\frac{8}{x^2}$

$F(x)=\frac{7}{5}x^5+\frac{8}{x}$ + c avec c ∈ ℝ .

Exercice 2 :

On considère l'équation différentielle : $y'=2y+e^{2x}$ (E)

1) Démontrer que la fonction u définie sur ℝ par $u(x)=xe^{2x}$ est une solution de (E)

$u'(x)=1\times e^{2x}+x\times 2e^{2x}=e^{2x}+2xe^{2x}$ = $e^{2x}+2u(x)$

On a donc bien $u'=2u+e^{2x}$ donc u est solution de (E)

2) Résoudre l'équation différentielle : $y'=2y$ (E_0)

Les solutions de cette équa diff sont les fonctions f définies par $f(x)=Ce^{2x}$ avec C ∈ ℝ .

3) Démontrer qu'une fonction v définie sur ℝ est solution de (E) si et seulement si $v-u$ est solution de (E_0)

- v et u sont des solutions de (E) donc $v'=2v+e^{2x}$ et $u'=2u+e^{2x}$.

  Par soustraction il vient : $v'-u'=2v-2u$ c'est à dire $(v-u)'=2(v-u)$ d'où $v-u$ est solution de (E_0)

- Réciproquement,

  Si $v-u$ est solution de (E_0), on a $(v-u)'=2(v-u)$ c'est à dire $v'-u'=2v-2u$ d'où $v'=2v+u'-2u$. Or u étant solution de (E) on a $u'-2u=e^{2x}$ d'où $v'=2v+e^{2x}$ c'est à dire v solution de (E)

4) En déduire les solutions de l'équation (E)

$v-u$ est solution de (E) donc $v-u=Ce^{2x}$ d'où $v(x)=Ce^{2x}+u(x)=Ce^{2x}+xe^{2x}$

5) Déterminer la fonction f, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0

f s'écrit donc f(x)= $Ce^{2x}+xe^{2x}$ avec f(0)=1 ce qui donne C = 1 donc $f(x)=e^{2x}+xe^{2x}=(1+x)e^{2x}$

6) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation

$f'(x)=1e^{2x}+(1+x)\times 2e^{2x}$ = $(3+2x)e^{2x}$

- pour tout x ∈ $\mathbb{R}$, e^{2x} est positif donc le signe de f' est celui de $3+2x$ d'où

  pour tout $x\leq -\frac{3}{2}$, $f'(x)\leq 0$ et f décroissante

  pour tout $x\geq -\frac{3}{2}$, $f'(x)\geq 0$ et f est croissante

- limite en +∞ : on trouve +∞ pas de problème

  limite en -∞ : $f(x)=e^{2x}+xe^{2x}$ = $e^{2x}+\frac{2xe^{2x}}{2}$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}$ = 0

  $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x}$ = $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^{X}$ or d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^{X}$ = 0 donc

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{2e^3}$	↗	$+\infty$

Exercice 3 : Exercice venant du sujet zéro du BAC 2021

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C.
On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four. On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ;+\infty[$.
Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four.
Ainsi, $f(0,5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.
Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25 °C.
On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y'+6y=150$

1. a. Préciser la valeur de $f(0)$.

$f(0)=225$

b. Résoudre l'équation différentielle $y'+6y=150$

les solutions de l'équations sont les fonctions g de la forme $g(x)=C e^{-6t}-\frac{150}{-6}$ = $C e^{-6t}+25$

c. En déduire que pour tout réel $t \geq 0$, on a $f(t)=200 e^{-6t}+25$

f est solution de l'équation différentielle donc $f(t)=C e^{-6t}+25$ et on sait que $f(0)=225$
donc $C+25=225$ ce qui donne C = 200 d'où la réponse

2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :

- décroît ;
- tend à se stabiliser à la température ambiante.

La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?

- $f'(t)=-1200 e^{-6t}$ Donc $f'(t)$ < 0 et f décroit
- On sait que $\lim_{t \to +\infty} e^{-6t}$ = 0 donc $\lim_{t \to +\infty} f(t)=25$ ce qui signifie que la température se stabilise aux alentours de 25°C ce qui peut être considérer comme température ambiante

3. Montrer que l'équation $f(t)=40$ admet une unique solution dans $[0 ; +\infty[$.

$$f(t)=40$$

$$200 e^{-6t}+25=40$$

$$200 e^{-6t}=15$$

$$e^{-6t}=\frac{15}{200}$$

$$-6t=\ln\left(\frac{3}{40}\right)$$

$$t=\frac{\ln\left(\frac{3}{40}\right)}{-6}$$

donc l'équation admet bien une unique solution