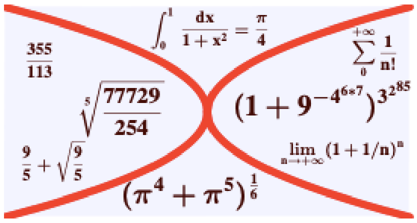

Terminale B

Mardi 15 septembre 2020
1 heure

Exercice 1 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n+2n+2$

Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n=n^2+n$

Initialisation : n = 0

$0^2+0=0=u_0$ donc la relation est vraie au rang 0 .

SQ il existe n tel que $u_n=n^2+n$

DQ $u_{n+1}=(n+1)^2+(n+1) \ = \ n^2+2n+1+n+1 \ = \ n^2+3n+1$

On sait que $u_n=n^2+n$ donc $u_n+2n+2=n^2+n+2n+2$ ce qui donne $u_{n+1}=n^2+3n+2$

la relation est donc héréditaire or elle est vraie au rang 0 donc elle est vraie pour tout entier n

Exercice 2 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3$

1) Calculer u_1 et u_2

$$u_1=\frac{1}{4}u_0+3=\frac{1}{4}\times1+3=\frac{7}{4} \qquad u_2=\frac{1}{4}u_1+3=\frac{1}{4}\times\frac{7}{4}+3=\frac{55}{16}$$

2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n<4$

Initialisation : n=0 $u_0=1<4$ relation vraie au rang 4

SQ il existe un entier n tel que $u_n<4$

DQ $u_{n+1}<4$

On sait que $u_n<4$

$$\frac{1}{4}u_n<\frac{1}{4}\times4$$

$$\frac{1}{4}u_n+3<1+3$$

$$u_{n+1}<4$$

La relation est donc héréditaire or elle est vraie au rang 0 donc elle vraie pour tout entier n

3) En utilisant la question précédente, démontrer que la suite (u_n) est croissante

Etudions le signe de $u_{n+1}-u_n$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{4}u_n+3-u_n=-\frac{3}{4}u_n+3$$

On sait que $u_n<4$ donc $-\frac{3}{4}u_n>-\frac{3}{4}\times4$ c'est à dire $-\frac{3}{4}u_n>-3$ d'où $-\frac{3}{4}u_n+3>0$ c'est à dire $u_{n+1}-u_n>0$ d'où $u_{n+1}>u_n$ et la suite est croissante

4) Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 4$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$

Il faut démontrer que $v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 4$

$v_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + 3 - 4$

$v_{n+1} = \frac{1}{4} u_n - 1$

$v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n - 4)$

$v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n$

donc suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = 1 - 4 = -3$

b) En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = -3\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$

On sait que $v_n = v_0 \times q^n$ donc $v_n = -3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$u_n - 4 = -3\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$u_n = -3\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$$

5) Soit S_n la suite définie par pour tout entier n par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

Démontrer que $S_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4n$

$$S_n = \left(-3\times\left(\frac{1}{4}\right)^0 + 4\right) + \left(-3\times\left(\frac{1}{4}\right)^1 + 4\right) + \left(-3\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 4\right) + \ldots - \left(3\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4\right)$$

$$S_n = -3\left(1 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) + 4 + 4 + \ldots + 4$$

$$S_n = -3\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} + 4\times(n+1)$$

$$S_n = -3\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} + 4n + 4$$

$$S_n = -4\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + 4n + 4$$

$$S_n = -4 + 4\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + 4n + 4 = \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4n$$

Exercice 3 :

Voici un fonction écrite en langage python :

```
def somme(N) :
    S = 0
    for i in range(N):
        S=S+i×(N−i)
    return S
```

Quel résultat s'affiche dans la console si l'on entre l'instruction somme(3) ? somme(4) ?

somme(3) : donc N = 3 S = 0 $i=0$ $S=0+0\times(3-0)=0$ $i=1$ $S=0+1\times(3-1)=2$ $i=2$ $S=2+2\times(3-2)=4$	somme(4) : donc N = 4 S = 0 $i=0$ $S=0+0\times(4-0)=0$ $i=1$ $S=0+1\times(4-1)=3$ $i=2$ $S=3+2\times(4-2)=7$ $i=3$ $S=7+3\times(4-3)=10$