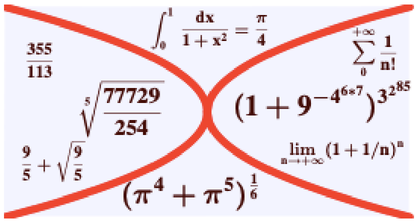

DM 5

Exercice 1 :

Un parachutiste chutait à la vitesse de 66 $m.s^{-1}$ avant d'ouvrir son parachute.

v(t) est sa vitesse de chute , en $m.s^{-1}$, t secondes après l'ouverture de celui-ci. Les frottements de l'air croissent rapidement avec la vitesse et pour tout t ≥ 0 , $v'(t)+\frac{g}{36}v^2(t)=g$ où g ≈ 9,81 est la constante gravitationnelle .

1) f est la fonction définie sur [0;+∞[par $f(t)=\frac{1}{v(t)-6}$. On admet que $f\neq 0$ pour tout t

a) Après avoir exprimé $v^2(t)$ en fonction de f(t) , exprimer $v'(t)$ en fonction de $f(t)$ et $f'(t)$

$f=\frac{1}{v-6}$ donc $\frac{1}{f}=v-6$ c'est à dire $v=\frac{1}{f}+6$ ce qui donne $v^2=\left(\frac{1}{f}+6\right)^2=\frac{1}{f^2}+\frac{12}{f}+36$ et $v'=-\frac{f'}{f^2}$

b) En déduire que f est solution d'une équation différentielle (E) du type $y'=ay+b$. On donnera a et b en fonction de g

v solution de $v'+\frac{g}{36}v^2=g \Leftrightarrow -\frac{f'}{f^2}+\frac{g}{36}\left(\frac{1}{f^2}+\frac{12}{f}+36\right)=g \Leftrightarrow -\frac{f'}{f^2}+\frac{g}{36f^2}+\frac{g}{3f}+g=g$ ssi

$-f'+\frac{g}{36}+\frac{g}{3}f=0 \Leftrightarrow y'=ay+b$ ⇔ y = f , a = $\frac{g}{3}$ et b = $\frac{g}{36}$

2) En déduire alors l'expression de la fonction v.

(E) a pour solution $f(t)=Ce^{\frac{g}{3}t}-\frac{\frac{g}{36}}{\frac{g}{3}} = Ce^{\frac{g}{3}t}-\frac{1}{12}$ d'où $v(t)=\frac{1}{f(t)}+6$

On a comme condition initiale $v(0)=66$ d'où $66=\frac{1}{f(0)}+6 = \frac{1}{C-\frac{1}{12}}+6$ ce qui donne

$C=\frac{1}{60}+\frac{1}{12} = \frac{1}{10}$ d'où $v(t)=\frac{1}{\frac{1}{10}e^{\frac{g}{3}t}-\frac{1}{12}}+6$

3) Etudier la limite de v en +∞ et interpréter ce résultat.

$\lim_{t\to+\infty}\frac{g}{3}t = +\infty$ or $\lim_{X\to+\infty}e^X = +\infty$ donc par composition des limites, $\lim_{t\to+\infty}e^{\frac{g}{3}t} = +\infty$

On obtient alors facilement , $\lim_{t\to+\infty}v(t)=6$ ce qui signifie que la vitesse du parachutiste se stabilise autour de 6 $m.s^{-1}$

Exercice 2 :

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre. Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un milieu fluide, le modèle parabolique n'est pas retenue. On modélise le projectile par un point qui se déplace dans un plan vertical sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [0;1] par

$f(x)=bx+2\ln(1-x)$ où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2 .

1) La fonction f est dérivable sur [0;1]. Calculer $f'(x)$ et en déduire que le maximum de la fonction est égal à $b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.

$f'(x)=b-\frac{2}{1-x} = \frac{b-bx-2}{1-x}$

comme x est dans $[0;1]$, $1-x$ est positif donc le signe de f' est celui de $b-bx-2$

$b-bx-2>0$ ssi $-bx>-b+2$ ssi $x<1-\frac{2}{b}$. Comme b ≥ 2 , on a $0\leq\frac{2}{b}\leq1$ d'où f est croissante sur $\left[0;1-\frac{2}{b}\right]$ puis décroissante sur $\left[1-\frac{2}{b};1\right]$. f admet donc un maximum en

$x=1-\frac{2}{b}$ qui vaut $f\left(1-\frac{2}{b}\right)=b\left(1-\frac{2}{b}\right)+2\ln\left(1-\left(1-\frac{2}{b}\right)\right) = b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$

2) Déterminer pour quelle valeur du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre .

On doit résoudre $b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)\leq1{,}6$ c'est à dire $b+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)-3{,}6\leq0$ avec $b\geq2$

Soit g la fonction définie par $g(x)=x+2\ln\left(\frac{2}{x}\right)-3{,}6$. On cherche donc x pour que g≤0

$g'(x)=1+2\times\frac{\frac{-2}{x^2}}{\frac{2}{x}} = 1-\frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$

Comme x est dans [2;+∞[, $g'(x)\geq0$ d'où g est croissante

$g(2)=2+2\ln(1)-3{,}6=-1{,}6$

$g(x)=x-2\ln\left(\frac{x}{2}\right)-3{,}6 = x\left(1-\frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)-3{,}6$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$ or $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X} = 0$ (croissance comparée) donc par composition des limites, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 0$. On obtient alors facilement $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

La fonction g est donc continue et strictement croissante sur [2;+∞ [, et on a

$g([2;+\infty[)=[-1{,}6;+\infty[$ d'où d'après le th de la bijection, comme 0 ∈]-1,6;+∞[, il existe un unique α ∈ [2;+∞[tel que $g(\alpha)=0$. avec $\alpha \approx 5{,}691$

Donc pour b≤ α , g est négative et la hauteur du projectile ne dépassera pas 1,6 mètre