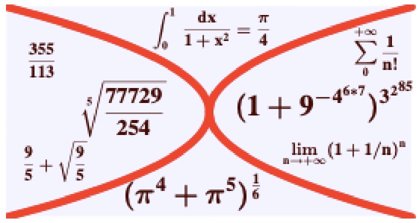
DM 3



Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=(x^4-10x^3+44x^2-109x+128)e^{x-4}$

1) Déterminer la dérivée seconde de f

$f'(x)=(4x^3-30x^2+88x-109)e^{x-4}+(x^4-10x^3+44x^2-109x+128)e^{x-4}$

$\quad = (x^4-6x^3+14x^2-21x+19)e^{x-4}$

$f''(x)=(4x^3-18x^2+28x-21)e^{x-4}+(x^4-6x^3+14x^2-21x+19)e^{x-4}$

$\quad = (x^4-2x^3-4x^2+7x-2)e^{x-4}$

2) a) Déterminer les racines évidentes de $x^4-2x^3-4x^2+7x-2$. On les notera x_1 et x_2

$x_1=1$ et $x_2=-2$ il suffit de remplacer x_1 et x_2 pour trouver zéro

b) Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned} x^4-2x^3-4x^2+7x-2 &= (x-x_1)(x-x_2)(ax^2+bx+c) \\ &= (x-1)(x+2)(ax^2+bx+c) \\ &= (x^2+x-2)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^4+bx^3+cx^2+ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c \\ &= ax^4+(b+a)x^3+(c+b-2a)x^2+(c-2b)x-2c \end{aligned}$$

Par identification des coefficients : $\begin{cases} a=1 \\ b+a=-2 \\ c+b-2a=-4 \\ c-2b=7 \\ -2c=-2 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=1 \end{cases}$

c) En déduire le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Comme e^{x-4} est strictement positif, le signe de f'' est celui de

$x^4-2x^3-4x^2+7x-2=(x-1)(x+2)(x^2-3x+1)$

x^2-3x+1

$\Delta = 9-4=5 > 0$ donc deux racines $x_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_4 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$		-2		x_3		1		x_4		$+\infty$
signe de $x-1$		−	⋮	−	⋮	−	0	+	⋮	+	
signe de $x+2$		−	0	+	⋮	+	⋮	+	⋮	+	
signe de x^2-3x+1		+	⋮	+	0	−	⋮	−	0	+	
signe de f''		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

3) Etudier la convexité de f et les éventuels points d'inflexion

La dérivée seconde s'annule en -2 , x_3 , 1 et x_4 et en changeant à chaque fois de signe donc quatre points d'inflexion

f'' est positive sur]-∞ ;-2] $\cup$ $[x_3;1]$ $\cup$ $[x_4;+\infty[$ donc f est convexe sur ces intervalles

f'' est négative sur $[-2;x_3]$ $\cup$ $[1;x_4]$ donc f est concave sur ces intervalles

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+n-1$

1) Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique

   $u_1=\frac{1}{2}u_0+0-1 = -\frac{1}{2}$ $\quad u_2=\frac{1}{2}u_1+1-1=-\frac{1}{4}$

   $u_1-u_0=-\frac{3}{2} \neq u_2-u_1=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ donc non arithmétique

   $\frac{u_1}{u_0}=-\frac{1}{2} \neq \frac{u_2}{u_1}=\frac{1}{2}$ donc non géométrique

2) Démontrer que pour tout entier $n \geq 4$, $u_n \geq n-2$

   $u_3=\frac{1}{2}u_2+2-1=-\frac{1}{8}+1 = \frac{7}{8}$ $\quad u_4=\frac{1}{2}u_3+3-1 = \frac{7}{16}+2 = \frac{39}{16}$

   <u>initialisation :</u> n=4 : 39/16=2,4375 > $4-2=2$ donc relation vrai au rang 4

   SQ il existe un entier n tel que $u_n \geq n-2$ et DQ $u_{n+1} \geq n+1-2$ cad $u_{n+1} \geq n-1$

   on sait que $u_n \geq n-2$ donc

   $$\frac{1}{2}u_n \geq \frac{1}{2}(n-2)$$

   $$\frac{1}{2}u_n+n-1 \geq \frac{1}{2}n-1+n-1$$

   $$u_{n+1} \geq \frac{3}{2}n-2$$

   or $\frac{3}{2}n-2-(n-1) = \frac{1}{2}n-1 = \frac{n-2}{2}$ qui est positif dés que $n \geq 2$ donc comme $n \geq 4$,

$\frac{3}{2}n-2-(n-1) \geq 0$ cad $\frac{3}{2}n-2 \geq n-1$ et on obtient donc $u_{n+1} \geq n-1$

La relation est donc héréditaire et comme elle est vraie au rang 4 elle l'est pour tout $n \geq 4$

3) On donne la suite (v_n) définie par $v_n=4u_n-8n+24$

   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique strictement décroissante.

   $v_{n+1}=4u_{n+1}-8(n+1)+24 = 4\left(\frac{1}{2}u_n+n-1\right)-8n-8+24 = 2u_n-4n+12 =$

   $\frac{1}{2}(4u_n-8n+24) = \frac{1}{2}v_n$ donc suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de premier terme

   $v_0=4u_0-8\times 0+24=28$

   b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n

   $v_n=v_0\times q^n=28\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $4u_n-8n+24=28\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ce qui donne $u_n=7\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+2n-6$

   c) Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_n=x_n+y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et

(y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune, le premier terme ainsi que la raison

$x_n = 7\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de premier terme $x_0 = 7$

$y_n = 2n - 6$ suite arithmétique de raison 2 de premier terme $y_0 = -6$

d) En déduire l'expression de : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$ en fonction de n

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = x_0 + y_0 + x_1 + y_1 + \ldots + x_n + y_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n + y_0 + y_1 + \ldots + y_n$$

$$= 7\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 2\times 0 - 6 + 2\times 1 - 6 + \ldots + 2\times n - 6$$

$$= 7\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-1/2} - 6\times(n+1) + 2(1+2+\ldots+n) = 14\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) - 6n - 6 + 2\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 14 - 14\times\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6n - 6 + n^2 + n = -14\left(\frac{1}{2}\right)^n - 5n + n^2 + 8$$