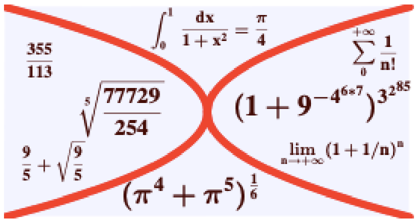
DM 3



Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=(x^4-10x^3+44x^2-109x+128)e^{x-4}$

1) Déterminer la dérivée seconde de f

2) a) Déterminer les racines évidentes de $x^4-2x^3-4x^2+7x-2$. On les notera x_1 et x_2

b) Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout réel x, on a

$$x^4-2x^3-4x^2+7x-2 = (x-x_1)(x-x_2)(ax^2+bx+c)$$

c) En déduire le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3) Etudier la convexité de f et les éventuels points d'inflexion

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+n-1$

1) Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique
2) Démontrer que pour tout entier $n \geq 4$, $u_n \geq n-2$
3) On donne la suite (v_n) définie par $v_n=4u_n-8n+24$

   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique strictement décroissante .

   b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n

   c) Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_n=x_n+y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune, le premier terme ainsi que la raison

   d) En déduire l'expression de : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$ en fonction de n