Bac Blanc Classe de Terminale

Epreuve de Spécialité Mathématiques

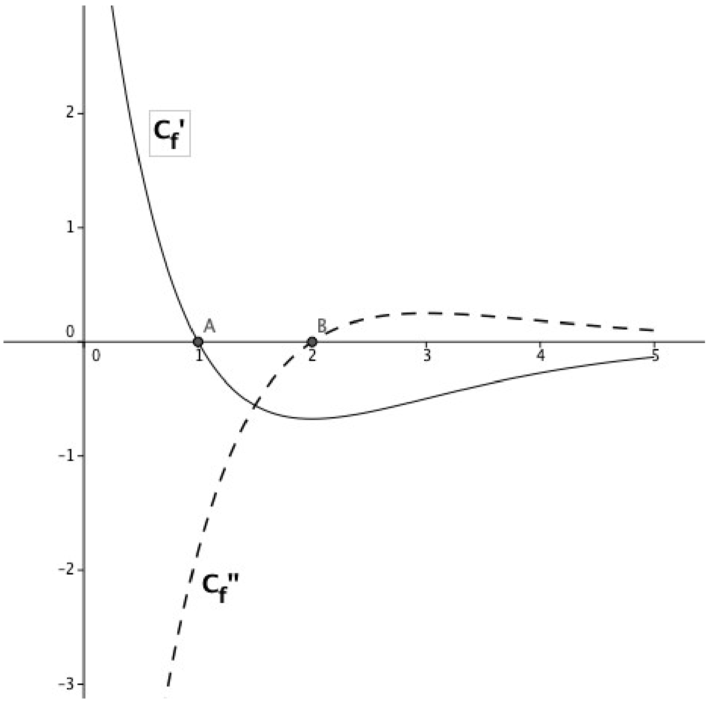
Mercredi 4 novembre 2020

Durée 4 heures

Merci de recopier dans l'entête de la copie ce qui suit :
Exercice 1 : / 2 Exercice 2 : / 4 Exercice 3 : / 5 Exercice 4 : / 5 exercice 5 : / 4

Exercice 1 (2 points) :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0;5]$.
On a représenté ci-dessous la courbe $(C_f\,')$ de la fonction dérivée $f\,'$ ainsi que la courbe $(C_f\,'')$ de la fonction dérivée seconde $f\,''$ sur l'intervalle $[0;5]$
Le point A de coordonnées $(1;0)$ appartient à $(C_f\,')$ et le point B de coordonnées $(2;0)$ appartient à la courbe $(C_f\,'')$

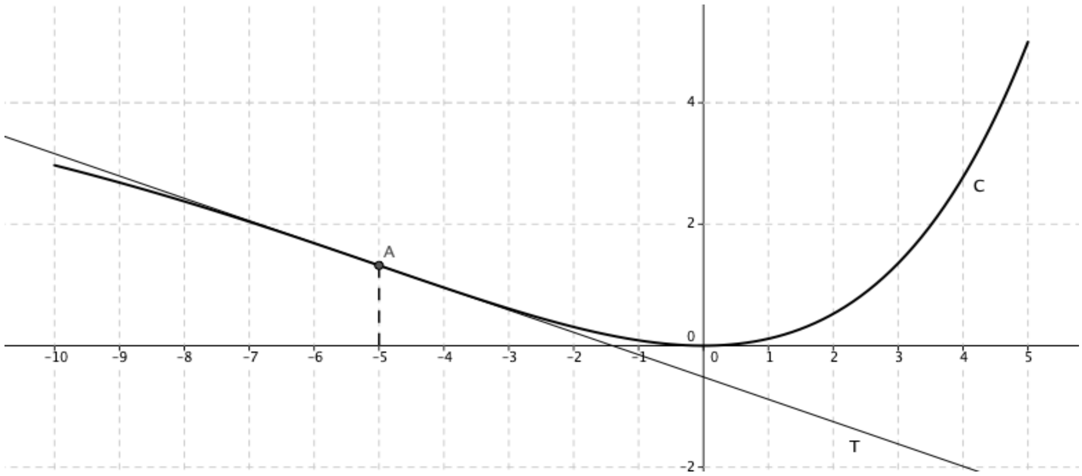


A l'aide de ce graphique, répondre aux questions suivantes :

1) Déterminer le sens de variation de la fonction f. Justifier
   $f\,'$ est positive sur [0;1] et négative sur [1;5] donc f est croissante sur [0;1] et décroissante sur [1;5]
2) Déterminer sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe. Justifier
   f est convexe dés que $f\,'$ est croissante et concave dés que $f\,'$ est décroissante donc f est convexe sur [2;5] et concave sur [0;2]
3) La courbe f admet-elle des points d'inflexion ? Justifier
   La dérive seconde s'annule en changeant de signe en x = 2 donc point d'inflexion en x = 2
4) On sait que $f(0)=0$ et f(1) ≈ 1,8 et f(2) ≈ 1,35
   Construire une courbe qui pourrait être celle de f
   Voir copie

Exercice 2 (4 points) :

On a représenté dans le repère orthogonal ci-dessous, la courbe C représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10;5]$ et la tangente T à C au point A .



PARTIE A

Dans cette partie les estimations seront obtenues par lecture graphique

Cette partie A est un QCM où pour chacune des questions une seule des quatre réponses est exacte .

Aucune justification n'est demandée.

1) Parmi les quatre valeurs ci-dessous, la meilleure valeur approchée du coefficient directeur de la tangente T est : a) $-\frac{1}{3}$ b) -3 c) 3 d) $\frac{1}{3}$

2) La fonction semble :

   a) concave sur $[-5;0]$ b) concave sur $[-10;0]$

   c) convexe sur $[-10;5]$ d) convexe sur $[-5;5]$

PARTIE B

La fonction f précédente est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-10;5]$ par :

$$f(x)=(x-5)e^{0,2x}+5$$

1) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-10;5]$

   a) Montrer que $f'(x)=0,2\,x\,e^{0,2x}$

   $f'(x)=1\times e^{0,2x}+(x-5)\times 0,2\times e^{0,2x} = (1+0,2x-5\times 0,2)e^{0,2x} = 0,2\,x\,e^{0,2x}$

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-10;5]$

   pour tout x ∈ [-10;5], $e^{0,2x}$ est strictement positif donc le signe de f' est celui de 0,2x cad du signe de x d'où :

   pour tout $x \geq 0$, $f' \geq 0$ et f est croissante et pour tout $x \leq 0$, $f' \leq 0$ donc f est décroissante d'où le tableau :

x	-10		0		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-15e^{-2}+5$	↘	0	↗	5

c) Déterminer la valeur exacte du coefficient directeur de la tangente T à C au point A d'abscisse –5

ce coefficient directeur est $f'(-5) = 0{,}2\times(-5)e^{0{,}2\times(-5)} = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

2) a) Calculer $f''(x)$ la dérivée seconde de f

$f''(x)=0{,}2\times e^{0{,}2x}+0{,}2x\times 0{,}2e^{0{,}2x} = e^{0{,}2x}(0{,}2+0{,}04x)$

b) Etudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle [–5;10]

Il faut étudier le signe de f'' qui dépend de $0{,}2+0{,}04x$ car l'exponentielle est positive d'où

$0{,}2+0{,}04x=0$ donne x = $-\frac{0{,}2}{0{,}04} = -5$ d'où

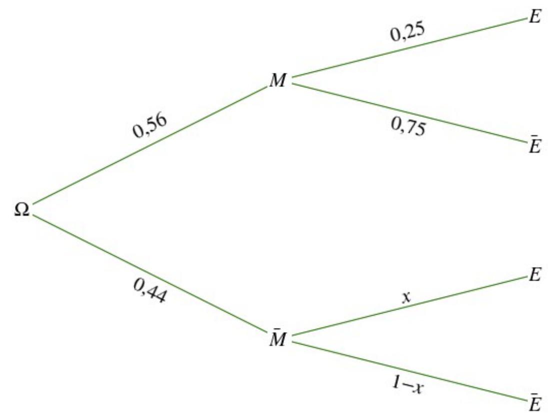
x	$-10 \quad -5 \quad 5$
signe de $0{,}2x+0{,}04$	$- \quad 0 \quad +$

On a donc : - pour tout x ∈ [–5;5], $f''(x)\geq 0$ et f est convexe

- pour tout x ∈ [–10;–5], $f''(x)\leq 0$ et f est concave

La dérivée seconde s'annule en –5 en changeant de signe donc point d'inflexion de coord $(-5;f(-5))$ c'est à dire $\left(-5;-\frac{10}{e}+5\right)$

<u>Exercice 3 (5 points) :</u> Les deux parties de cet exercice sont indépendantes



1) Construire un arbre pondéré illustrant la situation

2) Déterminer la probabilité M∩E .

P(M∩E) = $P(M)\times P_M(E) = 0{,}56\times 0{,}25 = 0{,}14$

3)a) Vérifier que $p(E)=0{,}44x+0{,}14$

Les événements M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a : P(E)=P(M∩E)+ P($\overline{M}$ ∩E)

c'est à dire $P(E)=0{,}14+P(\overline{M})\times P_{\overline{M}}(E) = 0{,}14+0{,}44x$

b) En déduire la valeur de x

On sait que P(E) = 0,162 donc 0,44x+0,14=0,162 qui donne x = 1/20 = 0,05

4)Le téléspectateur interrogé n'a pas regardé l'émission.

Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il ait regardé le match ?

On cherche $P_{\overline{E}}(M) = \frac{P(\overline{E}\cap M)}{P(\overline{E})} = \frac{0{,}56\times 0{,}75}{1-0{,}162}$ = 0,50 à 10^{-2} prés

PARTIE B

Dans l'entrepôt d'une usine , des maillots bleus et des maillots rouges sont stockés dans un carton. La proportion de maillots bleus est égale à 0,55.

1) Jeanne prend au hasard 10 maillots dans ce carton pour offrir à un groupe de VIP qui est venu visiter l'usine. Le nombre de maillots présents dans le carton est suffisamment grand pour que le tirages soient considérés comme identiques et indépendants.
   Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de maillots bleus.
   a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Justifier soigneusement la réponse
   le choix d'un maillot est une épreuve de Bernoulli avec pour succès : « le maillot est bleu » de probabilité 0,55 . Comme on choisit 10 maillots indépendamment , X suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,55
   b) Calculer la probabilité que Jeanne tire exactement huit maillots bleus (on arrondira le résultat au millième prés)
   $P(X=8) = \binom{10}{8} \; 0{,}55^8 \times 0{,}45^2 = 0{,}076$ à 10^{-3} près
   c) Calculer la probabilité que Jeanne tire au moins deux maillots bleus (on arrondira le résultat au millième prés)
   On veut $P(X\geq 2) = 1-P(X\leq 1) = 1-P(X=0)-P(X=1) = 1-0{,}45^{10}-10\times 0{,}55^1\times 0{,}45^9$
   $= 0{,}995$ à 10^{-3} près
2) Jeanne prend toujours au hasard des maillots dans le carton . La proportion de maillots bleus est toujours de 0,55 . Combien Jeanne doit-elle prendre de maillots, au minimum, pour que la probabilité d'avoir au moins un maillot bleu soit supérieure ou égale à 0,9999 ?

X suit toujours une loi binomiale mais cette fois ci de paramètres n et 0,55 (n représentant le nombre de tirages à effectuer) .

On cherche donc n tel que $P(X\geq 1)\geq 0{,}9999$

$$1-P(X=0)\geq 0{,}9999$$

$$P(X=0)\leq 0{,}0001$$

$$0{,}45^n \leq 0{,}0001$$

La calculatrice donne $n \geq 11{,}53$ donc il faut 12 tirages minimum

Exercice 4 (5 points) :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=3-\dfrac{10}{u_n+4} \end{cases}$

Partie A

1) Déterminer la valeur exacte de u_1 et u_2

$u_1=\dfrac{17}{9}$ et $u_2=\dfrac{69}{53}$

2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n\geq 1$

initialisation : n = 0 on a u_0=5≥1 donc relation vraie au rang 1

SQ il existe un entier n tel que $u_n\geq 1$ et DQ $u_{n+1}\geq 1$

On sait que $u_n\geq 1$

$$u_n+4\geq 5$$

$\dfrac{1}{u_n+4}\leq\dfrac{1}{5}$ chgt d'ordre car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^+$

$-\dfrac{10}{u_n+4}\geq -2$ on change l'ordre car multiplication par $-10 < 0$

$$3-\frac{10}{u_n+4}\geq 1$$

$$u_{n+1}\geq 1$$

La relation est donc héréditaire or elle est vraie au rang 0 donc par hérédité :

pour tout n ≥ 0 , $u_n\geq 1$

3) Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$

$$u_{n+1}-u_n = 3-\frac{10}{u_n+4} - u_n = \frac{3(u_n+4)-10-u_n(u_n+4)}{u_n+4} = \frac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}$$

or $(1-u_n)(u_n+2)=-u_n^2-u_n+2$ donc la relation est vérifiée

4) En déduire que la suite (u_n) est décroissante

Il faut étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$

On sait que $u_n\geq 1$ donc $u_n+2\geq 3$, $u_n+4\geq 5$ et $1-u_n\leq 0$ ainsi $u_{n+1}-u_n\leq 0$ c'est à dire $u_{n+1}\leq u_n$ et la suite est décroissante

Partie B

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$

1) a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$ et déterminer le premier terme v_0

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{3-\frac{10}{u_n+4}-1}{3-\frac{10}{u_n+4}+2} = \frac{2-\frac{10}{u_n+4}}{5-\frac{10}{u_n+4}} = \frac{\frac{2u_n-2}{u_n+4}}{\frac{5u_n+10}{u_n+4}} = \frac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)} = \frac{2}{5}v_n$$

donc suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ de premier terme $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+2} = \frac{4}{7}$

b) Exprimer v_n en fonction de v_0

En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 1$

$v_n=v_0\times q^n = \frac{4}{7}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$

Supposons qu'il existe un entier n tel que $v_n=1$, on aurait alors $\left(\frac{2}{5}\right)^n=\frac{7}{4}$ or $\left(\frac{2}{5}\right)^n<1$ et $\frac{7}{4}>1$

donc impossible et $v_n\neq 1$

2) On admet que pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{2v_n+1}{1-v_n}$. Déterminer la limite de la suite (u_n)

$-1<\frac{2}{5}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$

on a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2v_n+1=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-v_n = 1$ par quotient il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$

Partie C

On considère la fonction en langage python suivante :

```
def limite(p) :
    u = 5
    n = 0
    while u ≥ 1+10^(-p):
        n = n+1
        u = 3 - 10/(u+4)
    return n
```

1) Qu'obtient-on si l'on saisit dans la console **limite(2)** ?
   En retour on a : n = 6
2) Est-on certain que la boucle while s'arrêtera quelque soit la valeur de l'entier naturel p entré en argument ?
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$, tout intervalle ouvert contenant 1 contient tous les termes de la suite à partir

d'un certain rang or la condition $u\geq 1+10^{-p}$ signifie que tant que u $\notin$ $]0;1+10^{-p}[$, on calcule le terme de la suite suivant . Cette intervalle contenant 1 , on sait que tôt ou tard u_n sera dans cet intervalle .
A noter que l'on peut choisir un autre valeur que 0 dans l'intervalle car on sait que $u_n\geq 1$

Exercice 5 (4 points) :

Partie A

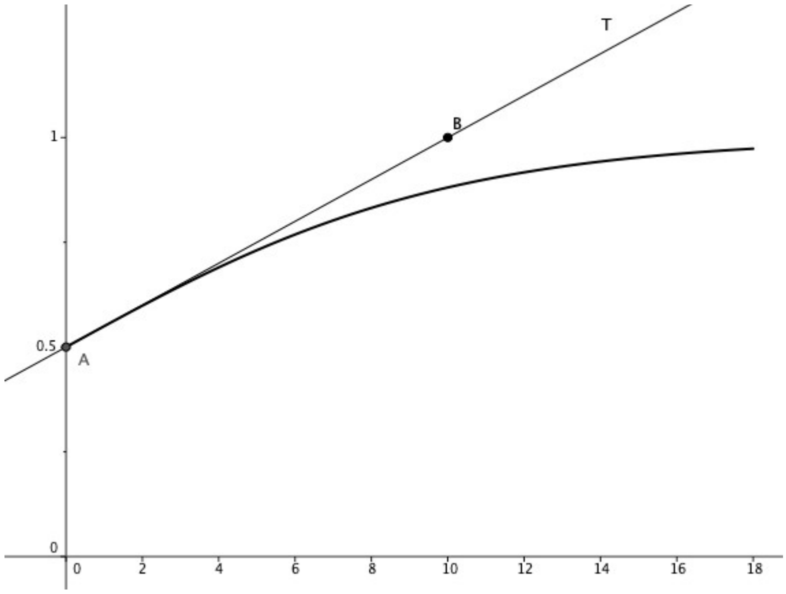
Soit a et b deux nombres réels. On considère la fonction f définie sur [0;+∞[par

$$f(x)=\frac{a}{1+e^{-bx}}$$

La courbe C_f représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donné ci-contre.

La courbe C_f passe par le point $A(0;0{,}5)$.

La tangente à la courbe C_f au point A passe par le point $B(10;1)$



1) Justifier que a = 1 . On obtient alors pour tout réel x ≥ 0 , $f(x)=\frac{1}{1+e^{-bx}}$

$f(0)=0{,}5$ donne $\frac{a}{1+1}=0{,}5$ c'est à dire a = 1

2) On admet que la fonction f est dérivable sur [0;+∞[et on note f' sa fonction dérivée. Vérifier que pour tout réel x ≥ 0 , $f'(x)=\frac{b e^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$

$f'(x)=-\frac{-b e^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$ = $\frac{b e^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$ on utilise ici la formule $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

3) Justifier que T a pour coefficient directeur $\frac{1}{20}$ et en déduire alors la valeur de b

T passe par A et B donc le coef dir est : a = $\frac{y_B-y_a}{x_B-x_A}$ = $\frac{1-0{,}5}{10-0}$ = $\frac{1}{20}$

Or ce coefficient directeur est aussi $f'(0)=\frac{b\times 1}{(1+1)^2}=\frac{b}{4}$ donc $\frac{b}{4}=\frac{1}{20}$ ce qui donne b = $\frac{1}{5}$ = 0,2

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur l'intervalle [0;+∞[par $p(x)=\frac{1}{1+e^{-0{,}2x}}$.

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er Janvier 2 000 .

Le nombre p(x) modélise la proportion d'individus équipés après x années. Ainsi, pour ce modèle, p(0) est la proportion d'individus équipés au 1er Janvier 2 000 et p(3,5) est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1) Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er Janvier 2010 ? On donnera un valeur approchée arrondie au centième.

On cherche $p(10)=\frac{1}{1+e^{-2}}$ = 0,88 à 10^{-2} prés

2) Déterminer le sens de variation de la fonction p sur l'intervalle [0;+∞[.

D'après la première partie , on a $p'(x)=\dfrac{0,2\,\mathrm{e}^{-0,2\,x}}{(1+\mathrm{e}^{-0,2\,x})^2}$. Tout est positif donc $p'\geq 0$ et p est croissante

3) On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 90 % , le marché est saturé.

a) Démontrer que trouver l'année où le marché est saturé revient à résoudre l'inéquation $\mathrm{e}^{-0,2\,x}<\dfrac{1}{9}$

on veut $p(x)\geq 0,9$ donc $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2\,x}}\geq 0,9$

$$1+\mathrm{e}^{-0,2\,x}\leq\frac{1}{0,9}$$

$$\mathrm{e}^{-0,2\,x}\leq\frac{1}{0,9}-1=\frac{0,1}{0,9}=\frac{1}{9}$$

b) En considérant que $\dfrac{1}{9}\ \approx\ \mathrm{e}^{-2,2}$, déterminer l'année où le marché est saturé.

On a donc $\mathrm{e}^{-0,2\,x}\leq\mathrm{e}^{-2,2}$ d'où $-0,2\,x\leq -2,2$ ce qui donne $x\geq\dfrac{2,2}{0,2}$ =11 il faut donc 11 ans

4) a) Déterminer $p''(x)$ pour tout réel x.

$p'(x)=\dfrac{0,2\,\mathrm{e}^{-0,2\,x}}{(1+\mathrm{e}^{-0,2\,x})^2}$ donc $p''(x)$ =

$$\frac{-0,2\times 0,2\,\mathrm{e}^{-0,2\,x}(1+\mathrm{e}^{-0,2\,x})^2-0,2\,\mathrm{e}^{-0,2\,x}\times 2\times(-0,2\,\mathrm{e}^{-0,2\,x})(1+\mathrm{e}^{-0,2\,x})}{(1+\mathrm{e}^{-0,2\,x})^4}$$

$$=\frac{(1+\mathrm{e}^{-0,2\,x})[-0,04\mathrm{e}^{-0,2\,x}(1+\mathrm{e}^{-0,2\,x})+0,08\,\mathrm{e}^{-0,2\,x}*e^{-0,2\,x}]}{(1+\mathrm{e}^{-0,2\,x})^4}=\frac{(1+\mathrm{e}^{-0,2\,x})\mathrm{e}^{-0,2\,x}(-0,04+0,04\,\mathrm{e}^{-0,02\,x})}{(1+\mathrm{e}^{-0,2\,x})^4}$$

b) Alice affirme que la croissance de la proportion d'individus qui possèdent ce type d'équipement ne fait que ralentir. Que penser de cette affirmation ? Justifier .

Si la croissante ne fait que ralentir , cela signifie que la fonction est concave et donc que la dérivée seconde est négative . Le signe de cette dérivée seconde dépend de $0,04-0,04\,\mathrm{e}^{-0,2\,x}$

$$-0,04+0,04\,\mathrm{e}^{-0,2\,x}<0$$

$$\mathrm{e}^{-0,2\,x}<1\ =\ \mathrm{e}^0$$

$$-0,2\,x<0$$

$$x>0$$

ainsi la dérivée seconde est négative dès que x est positif ce qui signifie que p est concave et que la croissante ne fait que ralentir