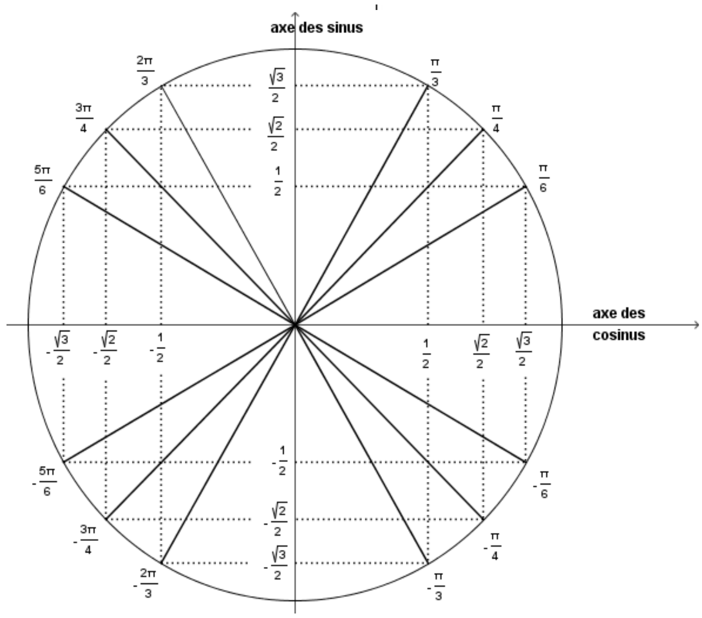
Chapitre : Les fonctions trigonométriques

I) Le cercle trigonométrique   Un cercle à savoir manipuler



Soit x un réel et M le point associé sur le cercle trigonométrique.
Les coordonnées de M sont M ($\cos x$; $\sin x$)

Par exemple, le point associé à $\frac{5\pi}{6}$ a pour coordonnées M ($-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}$) ce qui signifie que :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

On définit ainsi sur ℝ la **fonction sinus** qui à x associe $\sin x$ et la **fonction cosinus** qui a x associe $\cos x$.

- Utiliser le cercle trigonométrique pour retrouver le signe de ces deux fonctions sur $[-\pi;\pi]$

x	$-\pi$ π
Signe de sin(x)	

x	$-\pi$ π
Signe de cos(x)	

- Utiliser le cercle trigonométrique **pour résoudre des équations ou inéquations** sur $]-\pi;\pi]$:
  - $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$ ou $x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$ x = $\frac{\pi}{12}$ ou x = $-\frac{5\pi}{12}$
  - $\cos(x)<\frac{1}{2} \Leftrightarrow$ x ∈ $\left]-\pi;-\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{\pi}{3};\pi\right]$

II) Propriétés des fonctions sinus et cosinus

Périodicité	Parité
Pour tout réel x, les points du cercle trigonométrique associés aux réels x et $x+2\pi$ sont confondus. $\cos(x)=\cos(x+2\pi)$ et $\sin(x)=\sin(x+2\pi)$ **Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période** 2π	Pour tout réel x, les points du cercle trigonométrique associés aux réels x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. $\sin(-x)=-\sin(x)$ et $\cos(-x)=\cos(x)$ **La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire**

Remarque On peut généraliser les propriétés précédentes :

Périodicité : Une fonction f est dite périodique de période T si et seulement si pour tout réel x ∈ D_f , $x+T \in D_f$ et $f(x+T)=f(x)$

Parité : Une fonction f est dite **paire** si et seulement si pour tout x ∈ D_f , $-x \in D_f$ et $f(-x)=f(x)$

Une fonction f est dite **impaire** si et seulement si pour tout x ∈ D_f , $-x \in D_f$ et $f(-x)=-f(x)$

III) Dérivabilité

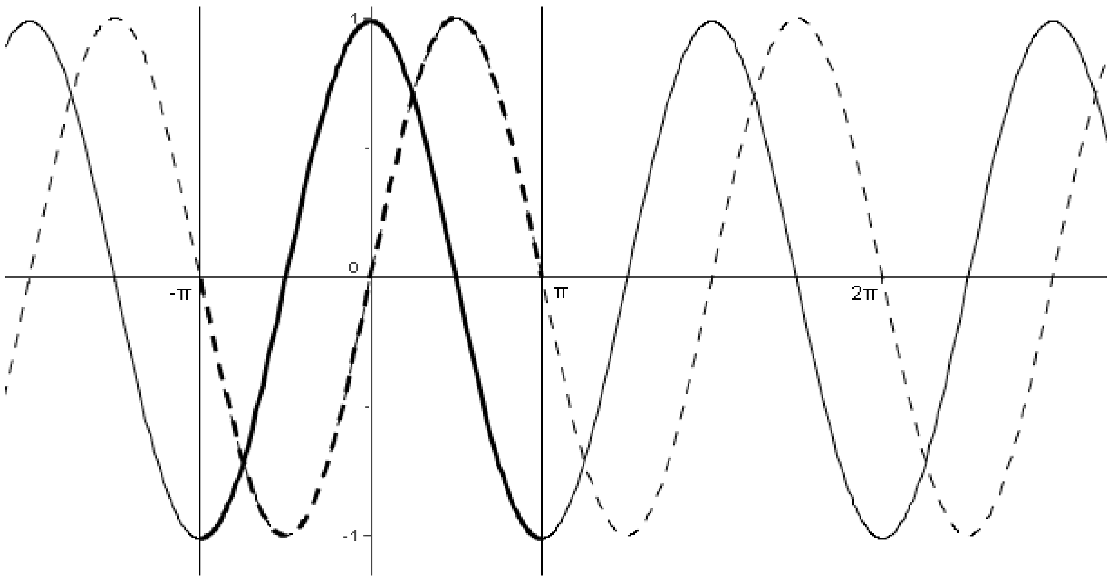
> Les fonctions sinus et cosinus sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a
> $$(\sin x)' = \cos x \quad \text{et} \quad (\cos x)' = -\sin x$$

Remarque : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I

La dérivée d'une fonction composée étant $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$, on peut donner les formules de dérivation suivantes pour sin (u) et cos (u) : $\mathbf{(\sin(u))' = u'\cos(u)}$ et $\mathbf{(\cos(u))' = -u'\sin(u)}$.

Ainsi, la dérivée de $\sin(2x^2+3x)$ **est** $(4x+3)\cos(2x^2+3x)$ **et celle de** $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ **est** $-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

IV) Représentation graphique



Retrouver les courbes représentant la fonction sinus et la fonction cosinus puis compléter le tableau de variations de la fonction sinus sur $[-\pi;\pi]$ et celui de la fonction cosinus sur $[0;\pi]$

x	
$\cos'(x) = -\sin(x)$	
cos(x)	

x	
$\sin'(x) = \cos(x)$	
sin(x)	

A noter que si une fonction est périodique, la connaissance de la courbe représentative de cette fonction sur une période permet d'obtenir la courbe complète par translation

> Pour finir, deux limites utiles à connaître :
> $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$