Equations différentielles

I- Notion d'équation différentielle

a) Définition

Une **équation différentielle** est une équation dont **l'inconnue est une fonction** dérivable sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Cette équation fait intervenir la fonction, généralement notée y, ses dérivées y' , y'' ..... et/ou des fonctions connues.

On distingue plusieurs types d'équations différentielles :

- Les équations différentielles **linéaires** du **premier** ordre à coefficients constants **sans** second membre :
  Exemple : $y' + 5y = 0$
- Les équations différentielles **linéaires** du **premier** ordre à coefficients constants **avec** second membre :
  Exemple : $y' + 5y = e^x$
- Les équations différentielles **linéaires** du second ordre à coefficients constants **sans** second membre :
  Exemple : $y'' + y' + 5y = 0$ *(elles sont hors programmes)*

Et bien d'autres ....

b) Equation différentielle et grand oral

Les équations différentielles interviennent dans la modélisation de phénomènes très vastes allant de la dynamique des populations à la prédiction de la fonte des banquises. Elles sont impliquées dans beaucoup de phénomènes qui nous entourent comme la météo ou l'effet papillon.

C'est pour ces raisons qu'il faut les connaître car elles peuvent faire l'objet de questions **pour votre grand oral** .

Fonctionnement du flash d'un appareil photo

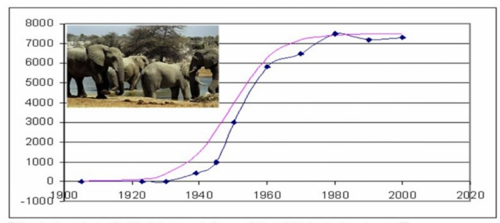
Equation différentielle $u'(t)+\frac{1}{RC}u(t)=\frac{E}{RC}$ (décharge du condensateur)

Equation logistique modèle de Verhulst

Equation différentielle $N'(t) = aN(t)(1-bN(t))$

avec a et b positifs

Elle modélise l'évolution d'une population en milieu fermé



Effectifs observés et effectifs théoriques de la population d'éléphants dans le parc Kruger.

II- Résolution de l'équation différentielle y' = ay (E)

Théorème : Soit a un réel.
Les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle $y' = a\,y$ sont les fonctions de la forme $f(x) = Ce^{ax}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

L'exponentielle étant non nul, on peut écrire $f(x)=e^{ax}\times g(x)$ où g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On a alors $g(x)=f(x)e^{-ax}$ ce qui prouve que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où $g'(x)=(f'(x)-a\times f(x))\times e^{-ax}$

- Si f vérifie l'équation $y' = a\,y$ alors $f'(x)-a\times f(x)=0$ d'où $g'(x) = 0$ et g est constante et en conséquence f s'écrit Ce^{ax}
- Réciproquement, si g est constante sur $\mathbb{R}$ alors $g'(x)=0$ et on a $(f'(x)-a\times f(x))\times e^{-ax}=0$ Or comme l'exponentielle est non nulle il vient $f'(x)-a\times f(x)=0$ cad f solution de $y' = ay$

Solution prenant une valeur donnée en un point donné

Pour tout $(x_0 ; y_0) \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution de (E) prenant la valeur y_0 en x_0 c'est à dire tel que $f(x_0)=y_0$. La constante C vaut alors C = $y_0 \times e^{-ax_0}$.

Exemple : Les solutions de l'équation différentielle $y'=-3y$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=Ce^{-3x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

La seule fonction vérifiant f(1) = 2 est telle que 2 = $C e^{-3}$ ce qui donne C = $2e^{3}$ d'où $f(x)=2e^{3-3x}$

III- Equation différentielle $y'=ay+g$

a) Cas général

On s'intéresse ici aux équations différentielles de la forme $y'=ay+g$ où g est une fonction définie sur un intervalle I à valeur dans $\mathbb{R}$.

Dans le cas où g est la fonction nulle, on retrouve le cas du I).

Supposons connue une fonction f_0 solution de (E'). Nous avons démontré en activité le théorème suivant :

> **Théorème :** Soit a un réel et g une fonction définie sur un intervalle I .
> Les solutions de l'équation différentielle (E') : $y'=ay+g$ sont les fonctions f définies par $f(x)=Ce^{ax}+f_0(x)$ où C est une constante réel et f_0 une solution particulière de l'équation (E')

b) Cas où g est une fonction constante

Supposons g(x) = b. L'équation précédente devient (E') : $y'=ay+b$. Cherchons s'il existe une fonction constante solution de (E') c'est à dire $f_0(x)=k$. On a alors $f'_0(x)$ = 0 et comme f_0 est supposée solution de (E'), on a : $f'_0(x)=af_0(x)+b$ ce qui donne $0=a\times k+b$ d'où k = $-\dfrac{b}{a}$.

La fonction f_0 est donc telle que $f_0(x)=-\dfrac{b}{a}$ et en appliquant le théorème précédent, les solutions de (E') sont donc de la forme f(x) = $C e^{ax}-\dfrac{b}{a}$

> **Théorème :** Soit a et b deux réels.
> Les solutions de l'équation différentielle (E') : $y'=ay+b$ sont les fonctions f définies par $f(x)=Ce^{ax}-\dfrac{b}{a}$ où C est une constante réel

Grand oral Les équations différentielles précédentes sont celles imposées par le programme. Maintenant, dans vos recherches pour le grand oral vous tomberez peut être sur d'autres équations différentielles . Il faudra venir me voir pour savoir si vous pouvez les présenter