Fonction logarithme népérien

- **Fonction logarithme**

La fonction logarithme népérien est introduite comme fonction réciproque de la fonction exponentielle étudiée en classe de première. Les élèves s'appuient sur les images mentales des courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme.

Contenus

- Fonction logarithme népérien, notée ln, construite comme réciproque de la fonction exponentielle.
- Propriétés algébriques du logarithme.
- Fonction dérivée du logarithme, variations.
- Limites en 0 et en $+\infty$, courbe représentative. Lien entre les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle.
- Croissance comparée du logarithme népérien et de $x \mapsto x^n$ en 0 et en $+\infty$.

Capacités attendues

- Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation.
- Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.

Démonstration

- Calcul de la fonction dérivée de la fonction logarithme népérien, la dérivabilité étant admise.
- Limite en 0 de $x \mapsto x\ln(x)$.

Exemple d'algorithme

- Algorithme de Briggs pour le calcul du logarithme.

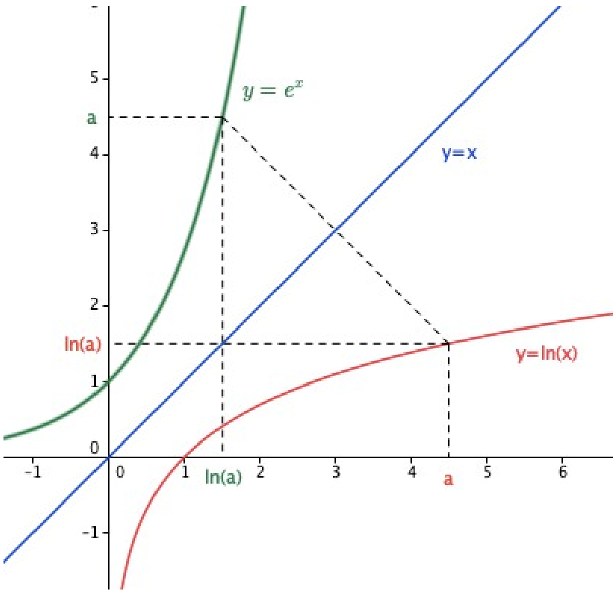
I- Définition du logarithme népérien

Définition :

- Pour tout réel a > 0, l'équation $e^x = a$ d'inconnue x, admet une solution et une seule dans R. Cette solution se note x = ln(a) et s'appelle le **logarithme népérien** de a
- La fonction qui , à tout réel a > 0 associe le réel ln(a) s'appelle la f**onction logarithme népérien** . C'est la fonction réciproque de la fonction exponentielle .
  Elle est définie sur]0;+∞[et elle est notée ln

Important à noter :

ln(x) n'existe que pour x strictement positif. Il faudra toujours en tenir compte pour l'étude de fonction ou la résolution d'(in)équations



Première propriété :

- **Réciprocité**
  - Pour tout réel x > 0 , $e^{\ln x} = x$
  - Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$
- $\ln(1) = 0$ et ln(e) = 1
- Les courbes représentatives des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x

II- Propriétés algébriques

Relation fonctionnelle	**Théorème :** Pour tous réels a et b de] 0 + ∞[, on a : ln (ab) = ln a + ln b

Démonstration Soient a et b deux réels strictement positifs. En exploitant le fait que $e^{\ln a} = a$, on a :

$$e^{\ln(ab)} = ab = e^{\ln a} e^{\ln(b)} \;=\; e^{\ln(a) + \ln(b)}$$

Or on sait que $e^x = e^y$ ⇔ x = y donc on a : ln(ab) = ln a + ln b

Conséquence : Soient x et y deux réels strictement positifs et n un entier relatif ; alors :

1) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ 2) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ 3) $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln x$

4) pour tout entier relatif n , $\ln(x^n) = n \ln x$

Démonstration : voir l'activité

III) Etude de la fonction logarithme népérien

a) Variation et dérivée

Propriétés :

- La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur]0;+∞[et pour tout réel x > 0 , on a : $\ln'(x)=\frac{1}{x}$
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout réel x de I , u(x) > 0.

La fonction composée: $\ln\circ u : x \to \ln(u(x))$ est dérivable sur I et on a $(\ln\circ u)'=\frac{u'}{u}$

Démonstration : On admet que la fonction ln est continue et dérivable pour x > 0 .
Soit $f(x)=e^{\ln(x)}$. f est dérivable sur]0;+∞[et on a $f'(x)=(\ln x)'e^{\ln x} = x(\ln x)'$

Or $f(x)=e^{\ln(x)}=x$ donc $f'(x)=1$. On obtient donc $x(\ln x)'=1$ et $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

Exemple : On a donc : $(\ln(x^2+1))'=\frac{2x}{x^2+1}$

Propriété : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur]0;+∞[

La fonction ln est définie sur les positifs et sa dérivée est $\frac{1}{x}$ donc cette propriété est évidente

Conséquences Pour tous réels a et b strictement positifs,

- $\ln(a)=\ln(b)$ ⇔ a = b
- $\ln(a)<\ln(b)$ ⇔ $a<b$

En particulier, on a :

- $\ln(a)\leq 0$ ⇔ a ∈]0;1]
- $\ln(a)\geq 0$ ⇔ a ∈ [1;+∞[

b) Limites

Propriétés :

- $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to 0} \ln(x)=-\infty$

Croissances comparées : pour tout entier naturel n ≥ 1

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}=0$
- $\lim_{x\to 0} x^n\ln(x)=0$

- La courbe représentative de la fonction ln admet donc une asymptote verticale d'équation x=0
- Le tableau de variation du ln est donc

x	0		+∞
f '(x)	‖	+	
f(x)	‖	−∞ ↗	+∞