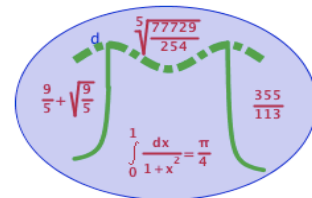


Primitive d'une fonction



I- Primitive d'une fonction continue

a) Définition

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle **primitive de f sur I** toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$

Théorème Soit f une fonction continue sur un intervalle I

Soient F et G deux primitives de f sur I . Alors F et G diffèrent d'une constante cad :

Pour tout $x \in I$, $G(x) - F(x) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

Puisque F et G sont deux primitives de f sur I , on a : $F' = G' = f$ sur I d'où $F' - G' = 0$ sur I

c'est à dire $F' - G' = (F - G)' = 0$ sur I

Or les seules fonctions qui admettent une dérivée nulle sont les fonctions constantes ainsi on a :

$F - G = c$ où c est une constante

b) Tableau des primitives usuelles

Les résultats de ce tableau s'établissent en vérifiant que l'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

Fonction f	Fonction primitive F (c constante)	Intervalle I
$f(x) = k$ (constante)	$F(x) = kx + c$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$I = \mathbb{R}$ si $n > -1$ $I =]-\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$ si $n < -1$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$F(x) = \ln(x) + c$	$I =]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$	$I = \mathbb{R}$

c) Opérations sur les primitives

OPERATIONS SUR LES PRIMITIVES		
Fonction	Primitives de f sur I	Conditions
$u' + v'$	$u + v + c$	I
ku' (k constante)	$ku + c$	I
$u' u^n$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + c$	$u(x) \neq 0$ sur I si $n < -1$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + c$	$u(x) > 0$ sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$u(x) > 0$ sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c$	$u(x) \neq 0$ sur I
$u' e^u$	$e^u + c$	I
$u' \times (v' \circ u)$	$v \circ u$	v est dérivable sur J et $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$

d) Existence de primitives

Théorème (admis) Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle