Primitive d'une fonction

I- Primitive d'une fonction continue

a) Définition

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **primitive de f sur I** toute fonction F dérivable sur I telle que $F'=f$

Théorème Soit f une fonction continue sur un intervalle I
Soient F et G deux primitives de f sur I . Alors F et G diffèrent d'une constante cad :
Pour tout x ∈ I , G(x) – F(x) = c avec c ∈ ℝ .

Démonstration :

Puisque F et G sont deux primitives de f sur I, on a : F' = G' = f sur I d'où F' – G' = 0 sur I
c'est à dire F' – G' = (F – G)' = 0 sur I
Or les seules fonctions qui admettent une dérivée nulle sont les fonctions constantes ainsi on a :

F – G = c où c est une constante

b) Tableau des primitives usuelles

Les résultats de ce tableau s'établissent en vérifiant que l'on a bien F' = f sur l'intervalle considéré.

Fonction f	Fonction primitive F (c constante)	Intervalle I
$f(x)=k$ (constante)	F(x) = k x + c	I = ℝ
$f(x)=x^n$ (n ∈ ℤ , n ≠ -1)	F(x) = $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ + c	I = ℝ si n > -1 I =]-∞;0[ou] 0 ; +∞[si n < -1
f(x) = $\frac{1}{x}=x^{-1}$	F(x) = $\ln(x)$ + c	I =]0 ;+∞[
f(x) = $\frac{1}{\sqrt{x}}$	F(x) = $2\sqrt{x}$ + c	]0 ;+∞[
f(x) = cos x	F(x) = $\sin x+c$	I = ℝ
f(x) = sin x	F(x) = $-\cos x+c$	I = ℝ
f(x) = e^x	F(x) = e^x+c	I = ℝ

c) Opérations sur les primitives

OPERATIONS SUR LES PRIMITIVES	u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I	
Fonction	**Primitives de f sur I**	**Conditions**
u' + v'	$u+v+c$	I
ku' (k constante)	$ku+c$	I
$u'u^n$ (n ∈ ℤ , n ≠ -1)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$	u(x) ≠ 0 sur I si n < -1
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)+c$	u(x) > 0 sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	u(x) > 0 sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	u(x) ≠ 0 sur I
$u'e^u$	e^u+c	I
$u'\times(v'\circ u)$	$v\circ u$	v est dérivable sur sur J et u(x) ∈ J pour tout x ∈ I

d) Existence de primitives

Théorème (admis) Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle