Chapitre 6 : Fonctions : Limites, Continuité

f désigne une fonction définie sur un intervalle I. On note C_f sa courbe représentative dans un repère

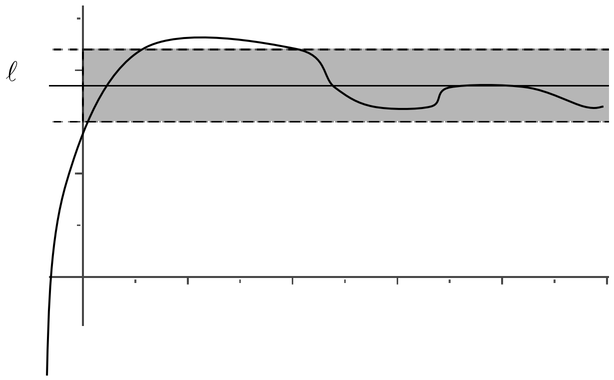
I- Limite d'une fonction au voisinage de l'infini

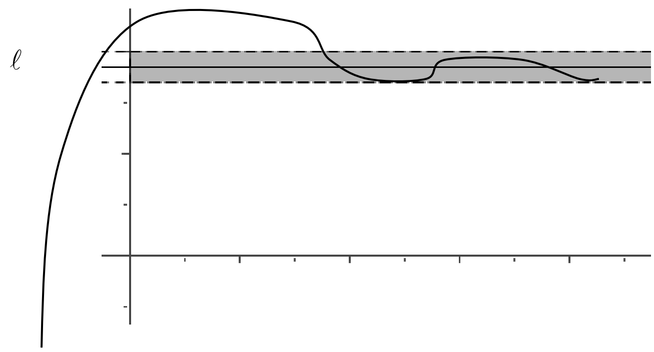
I contient un intervalle du type $]a\ ;+\infty[$ ou $]-\infty\ ;a[$ où a est un réel fixé

a) Limite finie – Asymptote horizontale

Définition 1: Soit ℓ un nombre réel. On dit que f admet pour limite ℓ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs f(x) pour x assez grand.

On écrit alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$





Remarques :

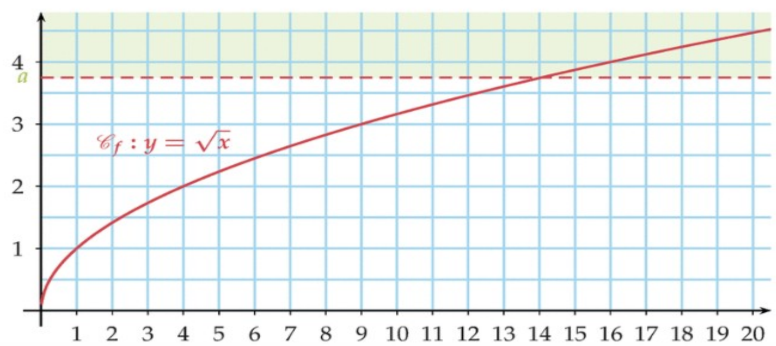
- Si on réduit l'épaisseur des « tuyaux », on est toujours capable de trouver un réel x à partir duquel toutes les valeurs de f(x) sont dans le « tuyau »

Définition : Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

b) Limite infinie

Définition 2 : On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de f(x) pour x assez grand. On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Exemple Soit f la fonction racine carrée. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
En effet, $\sqrt{x}$ devient aussi grand que l'on veut à mesure que x augmente.
Soit un intervalle ouvert $I =]a\ ; +\infty[$. Alors, $f(x)$ sera toujours dans I pour x assez grand.
Graphiquement, si on considère le demi-plan supérieur de frontière une droite d'équation $y = a$, il existe toujours une valeur de a au-delà de laquelle $\mathscr{C}_f$ ne sort plus de ce demi-plan.



Remarque: Si la limite est $-\infty$, cette définition s'adapte en prenant des intervalles de la forme $]-\infty;A[$

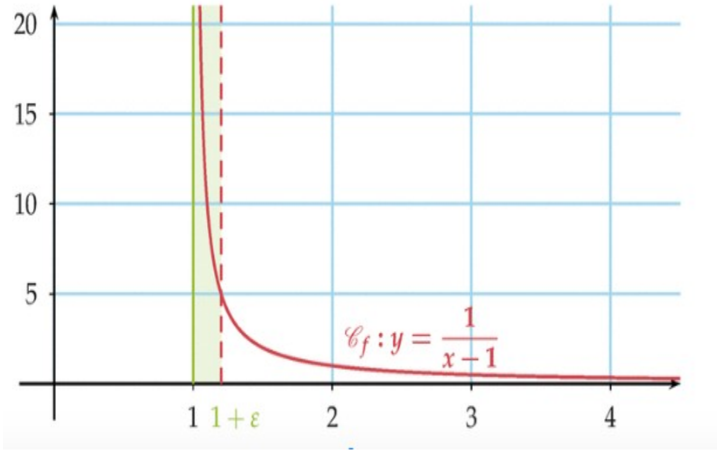
II- Limite infinie d'une fonction en un réel a – Asymptote verticale

Soit a un réel fixé, l'intervalle I contient a ou contient un intervalle ouvert dont a est une borne

Définition 4:
On dit que f admet + ∞ pour limite lorsque x tend vers a si les valeurs f(x) peuvent être rendues aussi grandes que l'on veut pour des valeurs de x suffisamment proches de a

On écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

Exemple :



Soit f la fonction définie sur]1;+∞[par f(x) = $\dfrac{1}{x-1}$.

On a $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$

En effet, si x tend vers 1 par valeur supérieur, alors $x-1$ tend vers 0^+ et son inverse tend vers +∞.

Soit un intervalle ouvert I = $]1;1+\epsilon[$.
Alors f(x) sera toujours dans I pour x assez proche de 1.
Graphiquement, C_f peut être aussi proche que l'on veut de la droite d'équation x = 1 d'où la définition :

Définition : Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite d'équation x=a est **asymptote verticale** à la courbe C_f

Parfois, ce sont les limites à gauche et à droite qui vont déterminer une asymptote verticale. On n'aura pas de limites en a juste une limite à droite ou à gauche. On écrit alors : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$

III- Croissance comparée

On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Théorème des croissances comparées
Pour tout entier naturel n, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Un théorème est utile quand il faut lever une indétermination (surtout avec la technique de factorisation par le terme de plus haut degré)

$$\lim_{x \to +\infty} e^x - x^2 = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} - x^2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - x^2 e^x}{x^2} = =\infty$$

IV- Limite d'une fonction composée en a

Propriété admise a , b et c représentent trois réels ou éventuellement +∞ ou –∞ et f et g deux fonctions.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$

Exemple : On souhaite déterminer la limite de h(x) = $\sqrt{x^2 - x + 1}$ en – ∞

On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - x + 1 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

Or $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc par composition des limites, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = +\infty$

IV – Théorèmes de comparaison

Théorème 2 (Théorème des gendarmes)

Soient f , g et h trois fonctions et ℓ un nombre réel

Si, pour x assez grand, on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

Cette propriété peut s'étendre à des limites quand x tend vers – ∞ ou vers un réel a ou des limites à droite ou à gauche

Théorème 3 Cas de limites infinies

Soient f , g deux fonctions

* Si, pour x assez grand, on a : $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
* Si, pour x assez grand, on a : $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Cette propriété peut s'étendre à des limites quand x tend vers – ∞ ou vers un réel a ou des limites à droite ou à gauche

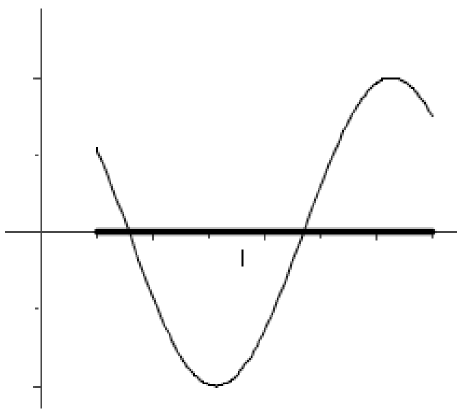
V – CONTINUITE

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I

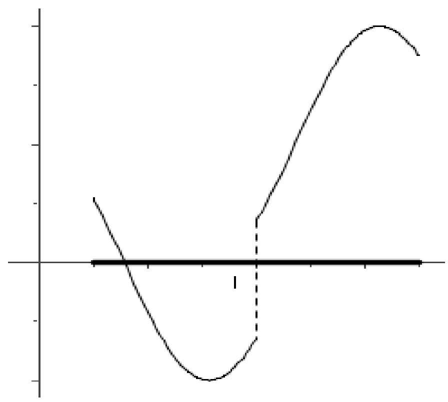
– Soit a un réel appartenant à I. On dit que f est **continue en a** ⇔ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

– On dit que la fonction f est **continue sur I** ⇔ f est **continue en tout point a de I**

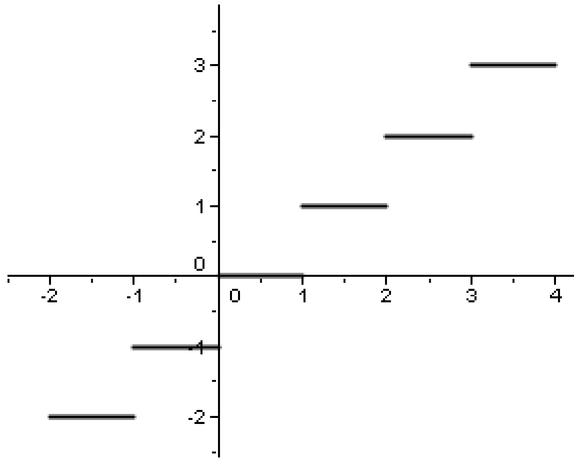
Graphiquement, on reconnaît qu'une fonction continue lorsqu'on peut tracer sa courbe sur l'intervalle I sans lever le stylo de la feuille



Une fonction n'est pas continue en un point a est lorsque la courbe a une discontinuité en a elle fait un saut



Un contre-exemple classique : **La fonction Partie Entière**



La fonction « Partie entière » est la fonction qui a tout réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x .

On la note E(x) ou encore $\lfloor X \rfloor$

Ainsi $\lfloor 2{,}5 \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à ...... donc $\lfloor 2{,}5 \rfloor$ = ...

De même, $\lfloor -2{,}4 \rfloor$ = ... , $\lfloor 1{,}999 \rfloor$ = ...

Si n est un nombre entier, $\lfloor n \rfloor$ = ... et pour tout x ∈ [n;n+1[, $\lfloor x \rfloor$ = ...

$\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x < n}} \lfloor x \rfloor$ = et $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x > n}} \lfloor x \rfloor$ = donc cette fonction n'est pas continue en n avec n ∈ $\mathbb{Z}$.

Propriété admise

* Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction racine carrée, les fonctions sinus et cosinus sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

* La somme , le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie

Remarques

* La plupart des fonctions qui seront étudiées seront des fonctions continues

* **Convention** Il est convenu que, dans un tableau de variation de fonction, les flèches obliques indiquent que la fonction est **continue et strictement monotone**

Le tableau de variation de la fonction carrée signifie que la fonction carrée est continue et strictement décroissante sur]-∞ ;0] et qu'elle est continue et strictement croissante sur [0 ;+∞[

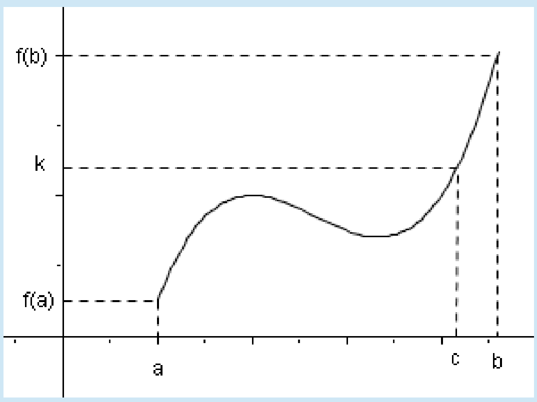
x	-∞		0		+∞
f	+∞	↘	0	↗	+∞

VI – Le théorème des valeurs intermédiaires

Une application importante : Le Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I.
Soit a ∈ I et b ∈ I.
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b)**, il existe au moins** un réel c compris entre a et b et tel que f(c) = k

Autrement dit
L'équation f(x) = k a **au moins** une solution comprise entre a et b



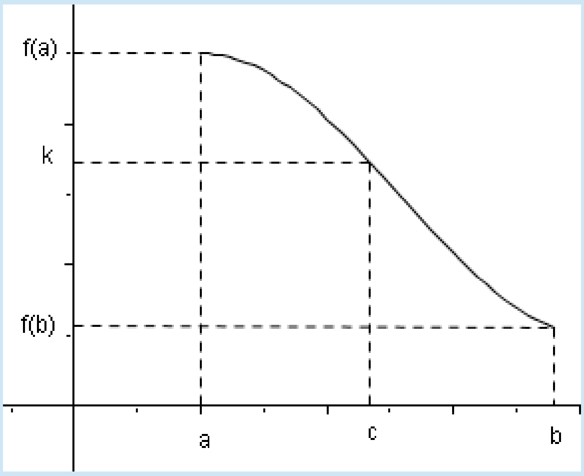
Exemple : Soit f la fonction définie par f(x) = x^3 . f est continue sur ℝ et on a f(1) = 1 et f(2) = 8.
D'après le TVI, pour tout k ∈ [1 ; 8], l'équation x^3 = k a au moins une solution dans [1 ; 2]

En particulier, $x^3 = 5$ a au moins une solution comprise dans [1 ;2]

Unicité de la solution
Cas d'une fonction strictement monotone

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle [a;b].
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b)**, il existe un et un seul** réel c compris entre a et b et tel que f(c) = k
Autrement dit

L'équation f(x) = k a une solution **unique** c dans [a;b]



Remarques :

- Ce théorème s'appelle aussi théorème de la **bijection**.
  En effet, on dit que f réalise une **bijection** de [a ;b] dans [f(a) ; f(b)] : A tout réel de l'intervalle [a ;b], on lui fait correspondre **un et un seul** réel de [f(a) ; f(b)]
- Dans le cas où f est décroissante, f réalise une **bijection** de [a ;b] dans [f(**b**) ; f(**a**)] car la fonction inverse l'ordre
- f(a) et f(b) peuvent être remplacées éventuellement par les limites de f en a et b

Un exemple pour comprendre : Soit f la fonction définie sur [0;+∞[par $f(x)=e^x(1-x)+3$

1) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation complet sur [0;+∞[

2) Expliquer pourquoi l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α

Détermination de α à la calculatrice à 10^{-2} près
On commence par rechercher à la calculatrice un intervalle I d'amplitude 1 dans lequel se trouve α .
Ici, on trouve : I =
Puis on reprogramme alors la calculatrice en jouant sur le pas de l'intervalle :