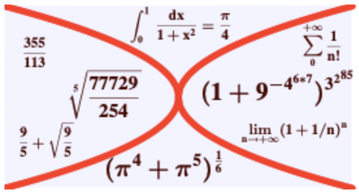



# Espace : Droites, plans et vecteurs

## I- Généralités

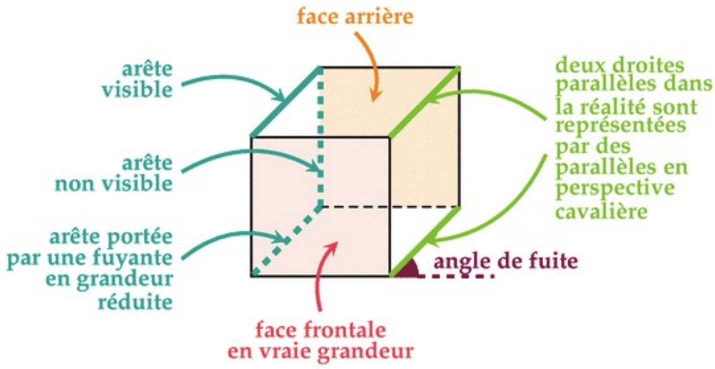
### 1) La perspective cavalière

Un solide de l'espace est un objet qui possède trois dimensions or une feuille de papier n'en possède que deux il faut donc modifier les règles de représentation si on veut se donner une bonne idée du solide. En voici quelques unes :

**Règles**

Dans la représentation d'un solide en perspective cavalière :

- Une figure située dans un plan vu de face est représentée en vraie grandeur
- Des droites parallèles dans la réalité sont représentées sur le dessin par des droites parallèles.
- Les éléments visibles sont représentés en trait plein ; les éléments cachés sont représentés en pointillés.




**Quelques dangers d'une figure dans l'espace :**

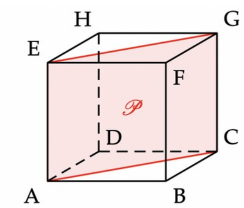
- Deux droites parallèles sur le dessin ne le sont pas toujours dans la réalité
- Trois points alignés sur un dessin ne le sont pas toujours dans la réalité
- Deux longueurs égales sur un dessin ne le sont pas toujours dans la réalité

### 2) Un élément essentiel : le plan

**Définition d'un plan** Trois points non alignés définissent un plan (P)
Le plan est noté (ABC) si (P) est défini par les points A , B et C
Deux droites sécantes ou strictement parallèles définissent aussi un plan

**Exemple :** Le plan P représenté sur la figure est défini par :

- les points A , E , G : (P) = (AEG) = (AEGC)
- les droites sécantes (AC) et (AE)
- les droites parallèles (AE) et (CG)
-

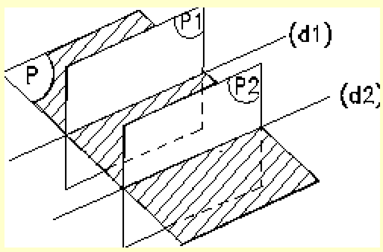



**Théorème :** Plans parallèles
Un plan coupe deux plans parallèles selon deux droites parallèles

$P_1 \ // \ P_2$

$P \cap P_1 = d_1 \qquad \Rightarrow \qquad d_1 // d_2$

$P \cap P_2 = d_2$

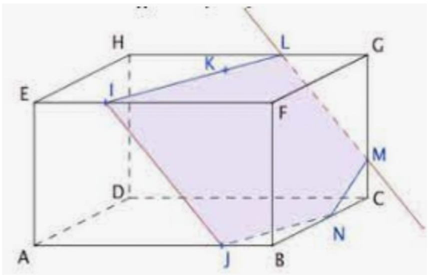



On va voir que cette propriété est très intéressante dans les sections

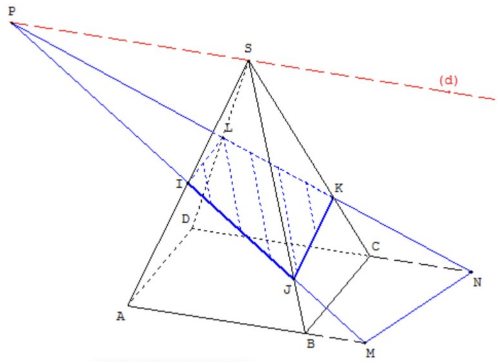
### 3) Section d'un solide par un plan

Construire la section d'un solide par un plan, c'est déterminer l'intersection du plan avec chacune des faces du solide.
La section est alors le polygone ainsi formé

Quelques exemples




La section du pavé par le plan (IJL) est le pentagone JILMN




La section de la pyramide par le plan (IJK) est le quadrilatère IJKL

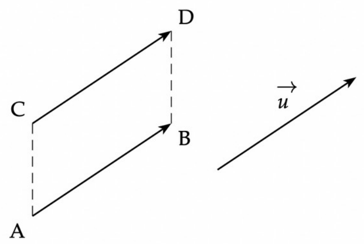
## II- Vecteurs de l'espace

### 1) Définition

La notion de vecteurs rencontrée dans le plan peut s'étendre à l'espace

Un vecteur $\vec{u}$ ou son représentant $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- une direction : celle de la droite (AB)
- un sens : celui de A vers B
- une norme, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ : la distance AB




**Théorème : Egalité de deux vecteurs**

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ⇔ ABDC est un parallélogramme

**Addition et vecteurs**

**Deux règles à connaître :**

- **Règle du parallélogramme** : Soit ABDC un parallélogramme.

  On a l'égalité : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$
- **Relation de Chasles :** Pour tous points A, B et C , $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

**Produit par un scalaire**

Soit k un réel et le vecteur $\vec{v} = k\ \vec{u}$ .

- $\vec{v}$ et $\vec{u}$ ont la même direction
- $\vec{v}$ et $\vec{u}$ ont le même sens **si k est positif** et un sens contraire **si k est négatif**
- $\|\vec{v}\| = |k|\times\|\vec{u}\|$

### 2) Quelques propriétés

**Colinéarité** : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$

__Remarques :__ C'est l'équivalent du parallélisme pour les droites mais on ne dit pas vecteurs parallèles mais vecteurs colinéaires

A noter : le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur

**De la colinéarité , on déduit** :

- Les points A , B , C sont alignés $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k \times \overrightarrow{AC}$
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k \times \overrightarrow{CD}$

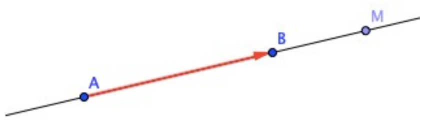
## III- Caractérisation vectorielle d'une droite et d'un plan

### 1) Le cas d'une droite

**Une droite est définie par un point et un vecteur directeur .**

La droite passant par A et de **vecteur directeur** $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires

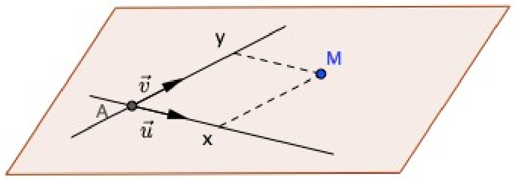
La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ où $k \in \mathbb{R}$




### 2) Le cas d'un plan

Un plan de l'espace peut être défini par la donnée de deux droites **sécantes** c'est à dire à partir de deux vecteurs **non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et d'un point A

On note $(A; \vec{u}, \vec{v})$ ce plan et le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est une **base du plan .**



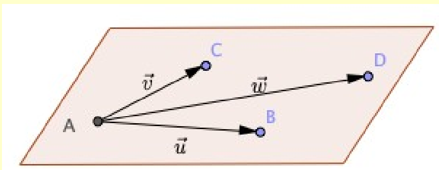

__Propriété__ (P) est le plan $(A ; \vec{u}, \vec{v})$

Un point M appartient au plan (P) si et seulement si il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est alors **une combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

__Conséquences__

- Soit $\vec{u}$ , $\vec{v}$ , $\vec{w}$ trois vecteurs du plan avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires
  Les vecteurs $\vec{u}$ , $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$
- Quatre points A , B , C , D sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{AC} + y\,\overrightarrow{AD}$




## IV- Position relative de droites et plans

### 1) Le cas de deux droites

Deux droites de l'espace peuvent être :

- **sécantes** : elles ont un point commun (visible ou non)
- **parallèles** : elles sont **coplanaires** et n'ont aucun point commun **ou** elles sont confondues
- **non coplanaires**

### 2) Le cas d'une droite et d'un plan

Une droite et un plan peuvent être:

- **parallèles** : la droite et le plan n'ont aucun point commun ou la droite est contenue dans le plan
- **sécantes** : la droite et le plan ont un point commun

### 3) Le cas de deux plans

Deux plans peuvent être :

- **parallèles** : si les deux plans n'ont aucun point commun ou si ces plans sont confondus
- **sécants :** leur intersection est alors **une droite**

### 4) Parallélisme

- Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan
- deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre

## V- Repérage

### a) Le principe

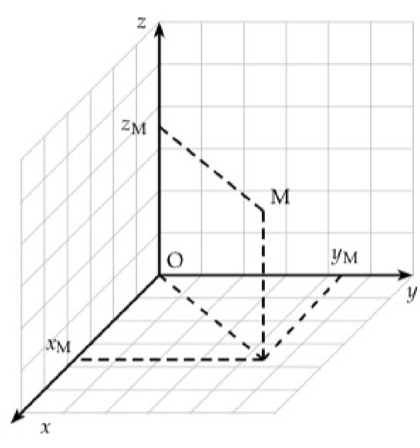
**Définition**

- Un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ comprend une origine O et de trois vecteurs non coplanaires $\vec{i}$ , $\vec{j}$ et $\vec{k}$ .

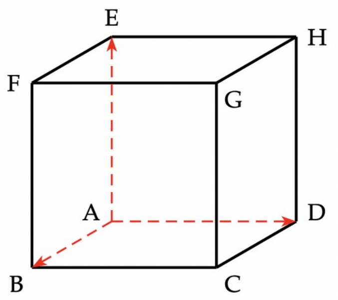
  Le triplet ( $\vec{i}$ , $\vec{j}$ , $\vec{k}$ ) est **une base de l'espace**
- Pour tout point M de l'espace, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ peut alors s'écrire de manière unique :

  $$\overrightarrow{OM} = x_M \vec{i} + y_M \vec{j} + z_M \vec{k}$$
- Le triplet ( $x_M$ ; $y_M$ ; $z_M$ ) est appelé coordonnées de M dans le repère ( O ; $\vec{i}$ , $\vec{j}$ , $\vec{k}$ )

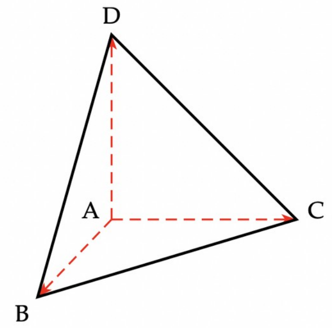
  $x_M$ est **l'abscisse** de M , $y_M$ est son **ordonnée**, $z_M$ est sa **côte**




## Des exemples de repère




Repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$




Repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$

## Quelques formules à connaître

- Si $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}\ (x_B-x_A\ ;\ y_B-y_A\ ;\ z_B-z_A)$
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}a+a'\\b+b'\\c+c'\end{pmatrix}$ et pour tout réel k, k $\vec{u}\begin{pmatrix}ka\\kb\\kc\end{pmatrix}$
- $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ est le milieu du segment [AB]
- Soit $\vec{u}$ ( a ; b ; c ) et $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$

  Dans un repère **orthonormé** , on a :

  $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ et $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

## b) Une application

**Exercice 1:** $A(2;0;1)$ , $B(1;-2;1)$, $C(5;5;0)$ $D(-3;-5;6)$

1) Montrer que A , B et C ne sont pas alignés
2) Montrer que A , B , C et D sont coplanaires

**1)** On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ : $\overrightarrow{AB}\ (-1;-2;0)$ et $\overrightarrow{AC}\ (3;5;-1)$

On a donc $\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{-1}{3} \neq \frac{-2}{5} = \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}}$ . Les coordonnées des vecteurs ne sont pas proportionnelles

donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et les points ne sont pas alignés

**2)** Recherchons s'ils existent deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\ \overrightarrow{AB} + b\ \overrightarrow{AC}$ .

$\overrightarrow{AD}\ (-5;-5;5)$ . En utilisant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ on obtient le système

suivant : $\begin{cases}-a+3b=-5\\-2a+5b=-5\\-b=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a-15=-5\\-2a-25=-5\\b=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-10\\b=-5\end{cases}$

On a donc $\overrightarrow{AD}=-10\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}$ d'où A , B , C et D sont coplanaires

## VI- Représentation paramétrique d'une droite

Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ passant par le point $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$.
La droite (d) admet une représentation paramétrique donnée par le système d'équations :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

<u>**Démonstration**</u> elle est très simple

Soit M un point de la droite D . Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc il existe t ∈ ℝ tel que

$\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$ d'où à l'aide des coordonnées, on a : $\begin{cases} x_M - x_A = ta \\ y_M - y_A = tb \\ z_M - z_A = ct \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$

<u>**Remarque**</u> A la lecture d'une représentation paramétrique de droite, on a donc un point de la droite et un vecteur directeur .

Beaucoup de savoirs faire sont à connaître à partir de cette représentation paramétrique. En voici quelques exemples :

**Que faire avec une représentation paramétrique de droite ?**

Soit d la droite passant par $A(5\,;7\,;9)$ de vecteur directeur $\vec{u}\;(-6\,;4\,;-4)$.
Le point $C(-1\,;11\,;-5)$ est-il sur d ?

La droite d a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 5 - 6t \\ y = 7 + 4t \\ z = 9 - 4t \end{cases}$.

Si C est sur d , il existe un unique t tel que $\begin{cases} 5 - 6t = -1 \\ 7 + 4t = 11 \\ 9 - 4t = -5 \end{cases}$

Les trois équations donnent t = 1 donc comme t est unique, C est sur d

Les systèmes suivants sont-ils associés à une même droite ?

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = 3 - 6s \\ y = -3s + 2 \\ z = 9s - 5 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

- Si on appelle $d_1$ et $d_2$ ces deux droites , les vecteurs directeurs respectifs sont : $\vec{u_1}\;(2\,;1\,;-3)$ et $\vec{u_2}\;(-6\,;-3\,;9)$.
  On constate que $\vec{u_2} = -3\,\vec{u_1}$ donc les vecteurs directeurs sont colinéaires d'où les droites sont parallèles.
- Si on prend t = 0 , le point $M(-1\,;0\,;1)$ est sur $d_1$. Est-il sur $d_2$ ?
  $\begin{cases} 3 - 6s = -1 \\ -3s + 2 = 0 \\ 9s - 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow s = \dfrac{2}{3}$ dans les trois équations donc $d_1 = d_2$ d'où la réponse

Les droites de représentations paramétriques $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-1-t \\ z=4+3t \end{cases}$ et $\begin{cases} x=1-3k \\ y=1+k \\ z=2-5k \end{cases}$ sont-elles sécantes ?

Si oui, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection .

On recherche s'il existe un unique couple $(t;k)$ tel que : $\begin{cases} 3+2t=1-3k \\ -1-t=1+k \\ 4+3t=2-5k \end{cases}$

On extrait les deux premières équations et on résout le système obtenu :

$$\begin{cases} 3+2t=1-3k \\ -1-t=1+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+3k=-2 \\ -t-k=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+3k=-2 \\ -2t-2k=4 \end{cases}$$

Par addition, il vient : k = 2 . D'où $-t-k$ = 2 donne t = $-4$

Il faut alors s'assurer que la troisième équation $4+3t=2-5k$ est vérifiée :

$$4+3t=4-12=-8 \text{ et } 2-5k=2-10=-8$$

Le couple $(t;k)$ = $(-4;2)$ est donc solution du système donc les droites sont sécantes.

On peut alors trouver les coordonnées du point d'intersection A à l'aide de l'une des deux équations :

$$t=-2 \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x_A=3+2\times(-4)=-5 \\ y_A=-1-(-4)=3 \\ z_A=4+3\times(-4)=-8 \end{cases}$$