

Limites de suites

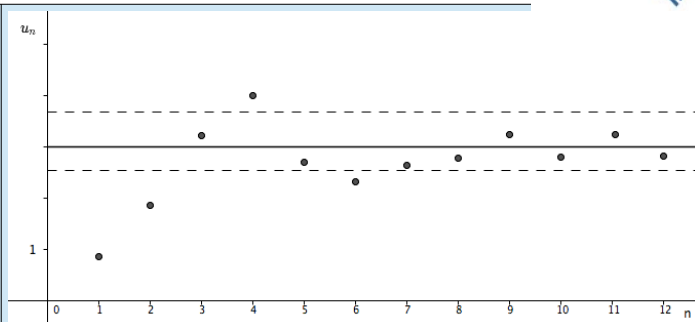
I- Limite d'une suite

a) Limite finie

Définition Soit (u_n) une suite de nombres réels.

On dit que la suite (u_n) admet pour limite ℓ quand n tend vers $+\infty$, lorsque **tout intervalle** $]a; b[$ contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite est **convergente vers ℓ** et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

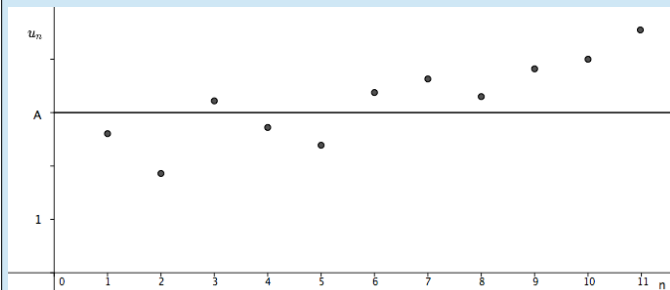


b) Limite infinie

Définitions

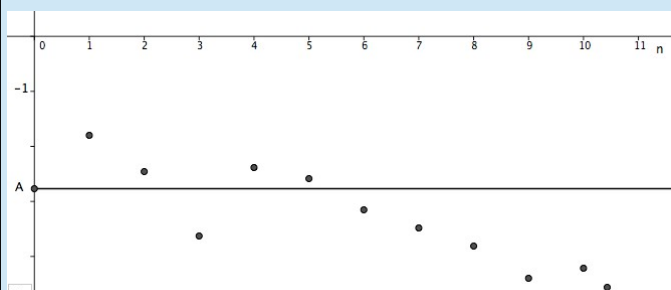
Soit (u_n) une suite de nombres réels et A un réel.

On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang



Soit (u_n) une suite de nombres réels et A un réel.

On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang



Remarques :

- Une suite convergente ne possède qu'une seule limite (voir démonstration en III)
- Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente et sa limite est $+\infty$, $-\infty$ ou pas de limite
- Ces définitions seront très utiles dès qu'il faudra démontrer des propriétés sur les limites de suites.
Cependant dans la pratique, il existe des méthodes plus intuitives pour déterminer une limite :

II- Opérations sur les limites

a) Limites d'une somme

Les suites (u_n) et (v_n) ayant une limite (finie ou infinie), la suite $u_n + v_n$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci-dessous :

$\lim u_n \backslash \lim v_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Forme Indéterminée (F I)
$-\infty$	$-\infty$	F I	$-\infty$

b) Limite d'un produit

Les suites (u_n) et (v_n) ayant une limite (finie ou infinie), la suite $u_n \times v_n$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci-dessous :

$\lim u_n \backslash \lim v_n$	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell * \ell'$	0	$\pm \infty$	$\pm \infty$
0	0	0	F I	F I
$+\infty$	$\pm \infty$	F I	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm \infty$	F I	$-\infty$	$+\infty$

c) Limite d'un quotient

Les suites (u_n) et (v_n) ayant une limite (finie ou infinie), la suite $\frac{u_n}{v_n}$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci-dessous :

$\lim u_n \backslash \lim v_n$	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	ℓ/ℓ'	0	$\pm \infty$	$\pm \infty$
0	$\pm \infty$	F I	$\pm \infty$	$\pm \infty$
$+\infty$	0	0	F I	F I
$-\infty$	0	0	F I	F I

d) Des limites à connaître

- Compléter les limites suivantes qui utilise votre bon sens :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = \text{pas de limite}$$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = ?$

Théorème (BAC) Soit la suite (q^n) définie sur $\mathbb{N}$, avec $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite

La démonstration de ce théorème dans le cas $q > 1$ sera vu en IV b).

Application

Ce théorème est utile pour déterminer la limite d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 car on sait alors $u_n = u_0 \times q^n$ d'où selon le signe de u_0 et la valeur de q on peut en déduire la limite de la suite (u_n)

III) Propriétés sur les limites

On a vu en exercice le théorème suivant :

Théorème 1 : Si une suite (U_n) converge, sa limite est unique

Théorème 2 (BAC) :

Si (U_n) est une suite croissante et converge vers un réel l alors elle est majorée par l

Démonstration : Raisonnons par l'absurde

Supposons qu'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > l$

L'intervalle $I =]l-1 ; u_{n_0}[$ est un intervalle contenant l . D'où comme la suite converge vers l , il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I mais la suite (u_n) est croissante donc

$$\text{pour } n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0} \text{ d'où } u_n \notin I$$

Il est donc impossible que I contienne tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. L'hypothèse de départ est donc fausse et la suite est majorée par l

Théorème : Si une suite (U_n) converge, elle est bornée

Démonstration

Soit (u_n) une suite qui CV vers l alors tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Prenons l'intervalle $]l-1 ; l+1[$

Donc pour tout $n \geq n_0$ $u_n \in]l-1 ; l+1[$. Ainsi pour $n \geq n_0$, u_n est bornée par $l-1$ et par $l+1$

Pour $n \leq n_0$, nous avons alors affaire à un nombre limité de termes de l'ensemble $\{u_0, u_1, \dots, u_{n_0}\}$

Il y a donc un plus grand et un plus petit terme dans cet ensemble d'où la suite est aussi bornée.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bornée

Remarque :

- La réciproque de ce théorème est fausse. Contre exemple avec la suite $U_n = (-1)^n$ bornée mais non convergente
- La **contraposée** de ce théorème nous permet d'affirmer qu'**une suite non bornée est divergente**

IV- Les théorèmes des gendarmes et de comparaisons

a) Le théorème des gendarmes (Admis)

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites numériques vérifiant à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n \leq w_n$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$

Un théorème très utile pour déterminer une limite car il est fréquent d'encadrer une suite par deux autres qui sont convergentes

Exemple : Déterminer la limite de $u_n = \frac{\sin n}{n}$

b) Les théorèmes de comparaisons

Les théorèmes de comparaisons (BAC) :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration du 1)

Par hypothèse, la suite (u_n) tend vers $+\infty$ donc pour $A \in \mathbb{R}$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0 cad pour tout $n \geq n_0$, $u_n > A$

On sait aussi que $v_n \geq u_n$ à partir d'un certain rang n_1

Notons alors N le plus grand des entiers n_0 et n_1 . On a alors :

Pour $n \geq N$, $v_n \geq u_n > A$ d'où l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) à partir du rang N .

Comme ce raisonnement s'applique pour tous réel $A \in \mathbb{R}$, la suite (v_n) tend vers $+\infty$

Une application (BAC) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ quand $q > 1$

On utilise pour cela **l'inégalité de Bernoulli** :

$$\text{pour tout } n \text{ et pour tout } a > 0, \text{ on a : } (1+a)^n \geq 1+na$$

Comme $q > 1$, on peut écrire $q = 1 + a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $a > 0$. D'après l'inégalité de Bernoulli, on a donc $q^n \geq 1+na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'où comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1+na = +\infty$ car $a > 0$ d'après les théorèmes de comparaisons, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

V- Théorèmes de convergence monotone

Théorème (BAC)

- Si (U_n) est une suite **croissante et non majorée** alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- Si (U_n) est une suite **décroissante et non minorée** alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration :

Démontrons le premier théorème

Soit (U_n) une suite croissante et non majorée.

Si une suite est majorée, il existe un réel $M \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq M$

Ainsi la suite n'étant pas majorée, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n > M$

A noter :

Le contraire de « il existe » est « quelque soit » et vice versa

Pendant, la suite étant croissante, pour tout $p > n$, on a $U_p \geq U_n$ ainsi $U_p > M$

On a donc prouvé tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]M; +\infty[$ à partir d'un certain rang d'où le résultat

Théorème (admis)

- Si (U_n) est une suite **croissante et majorée** alors elle converge
- Si (U_n) est une suite **décroissante et minorée** alors elle converge

Un théorème très utile pour assurer la convergence d'une suite. Cependant, il a ses limites car il ne nous renseigne pas sur la valeur de cette limite