Retour sur les probabilités

Exercice 1 : D'après Bac

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation.

Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée. Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1. a. Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.

b. Démontrer que la probabilité de non S sachant non F vaut $\frac{1}{4}$ c'est à dire $P_{\overline{F}}(\overline{S})=\frac{1}{4}$

c. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2. a. Démontrer que p(S) = 0,934.

b. Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition.

3. Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 euros, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 euros.

On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.

b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B et l'interpréter.

Exercice 2: Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4} . Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».

$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

1) a) Préciser les valeurs des probabilités P(V), $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.

Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b) En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.

2) Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0, 0492.

3) a) Justifier par un calcul la phrase :

« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40% de « chances » que la personne soit contaminée ».

b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif._

Exercice 3 :

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L , O , G , A , R , I , T , H , M , E (soit quatre voyelles et six consonnes)

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu

Deuxième étape :

- si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire
- si le dé indique 2 , il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune des ces deux boules portent une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- Si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune des ces trois boules portent une voyelle et il perd dans le cas contraire

On définit les événements suivants :

D_1 : le dé indique 1 D_2 : le dé indique 2 D_3 : le dé indique 3 G : La partie est gagnée

1) a) Construire un arbre de probabilités illustrant cette expérience
   b) Calculer P(G)
2) Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le 1 avec le dé.
3) a) Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité d'en gagner au moins une
   b) Un joueur fait n parties ($n \in \mathbb{N}$) . Quel nombre minimal de parties doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

Exercice 4 :

n est un entier supérieur ou égal à 4 . Dans une urne on place n jetons : un rouge et tous les autres blancs.
On tire successivement , au hasard et avec remise, deux jetons de l'urne. On gagne 16 points si on tire deux fois le jeton rouge, 1 point si on tire deux fois un jeton blanc et on perd 5 points dans tous les autres cas.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur

a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre
b) Déterminer la loi de probabilité de X
c) Exprimer, en fonction de n , l'espérance de X
d) Existe-t-il des valeurs de n pour lesquels le jeu est équitable ?
e) Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles le jeu est favorable au joueur ?

Exercice 5 :

Un jeu de hasard sur un ordinateur est paramétré ainsi :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est $\frac{1}{4}$
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est $\frac{1}{2}$
- La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$

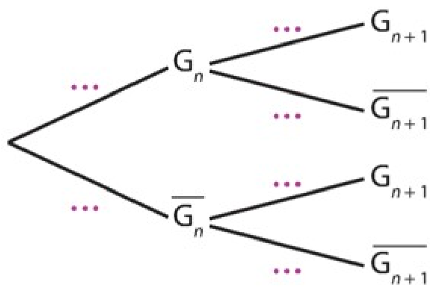
Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'événement « la nième partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet événement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$

1) Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$
2) Recopier et compléter l'arbre pondérée ci-contre
3) Montrer que pour tout entier n naturel non nul, $p_{n+1} = -0{,}25\,p_n + 0{,}5$
4) On définit pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - 0{,}4$

   a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique

   b) En déduire que $p_n = 0{,}4 - 0{,}15\,(-0{,}25)^{n-1}$

   c) La suite p_n semble converger . Si oui, conjecturer sa limite et interpréter

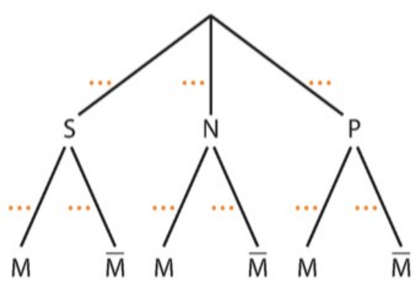


Exercice 6 :

Saumonix est poissonnier et 15 % du poisson qu'il vend a été pêché par ses soins, 30 % vient d'un grossiste normand et le reste d'un grossiste de Paris.
Il a remarqué que 5 % de ses clients sont mécontents du poisson qu'il a lui-même pêché, 10 % du poisson provenant du grossiste normand et 90 % du poisson de Paris.
Un client achète un poisson à Saumonix.
On considère les événements suivants :

- S : « Le poisson a été pêché par Saumonix. »
- N : « Le poisson provient du grossiste normand. »
- P : « Le poisson provient du grossiste de Paris. »
- M : « Le client est mécontent du poisson. »

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. a) Calculer $p(P \cap M)$ et $p(M)$.

b) Les événements S et M sont-ils indépendants ?

c) Un client est mécontent du poisson acheté.
Quelle est la probabilité que ce poisson ait été pêché par Saumonix ?