LOI BINOMIALE - ECHANTILLONNAGE

- **Succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli**

Contenus

- Modèle de la succession d'épreuves indépendantes : la probabilité d'une issue $(x_1,\dots,x_n)$ est égale au produit des probabilités des composantes x_i. Représentation par un produit cartésien, par un arbre.
- Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli.
- Schéma de Bernoulli : répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes.
- Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$: loi du nombre de succès. Expression à l'aide des coefficients binomiaux.

Capacités attendues

- Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes, ou une succession de deux ou trois épreuves quelconques. Représenter la situation par un arbre. Calculer une probabilité en utilisant l'indépendance, des probabilités conditionnelles, la formule des probabilités totales.
- Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli, par une loi binomiale.
- Utiliser l'expression de la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil, de comparaison, d'optimisation relatif à des probabilités de nombre de succès.
- Dans le cadre d'une résolution de problème modélisé par une variable binomiale X, calculer numériquement une probabilité du type $P(X = k)$, $P(X \leqslant k)$, $P(k \leqslant X \leqslant k')$, en s'aidant au besoin d'un algorithme ; chercher un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α, ou supérieure à $1 - \alpha$.

Démonstration

- Expression de la probabilité de k succès dans le schéma de Bernoulli.

Exemples d'algorithme

- Simulation de la planche de Galton.
- Problème de la surréservation. Étant donné une variable aléatoire binomiale X et un réel strictement positif α, détermination du plus petit entier k tel que $P(X > k) \leqslant \alpha$.
- Simulation d'un échantillon d'une variable aléatoire.

Approfondissements possibles

- Loi géométrique.
- Introduction de la loi de Poisson comme limite de lois binomiales. Interprétation (événements rares).

I- Succession d'expériences aléatoires indépendantes

Définition

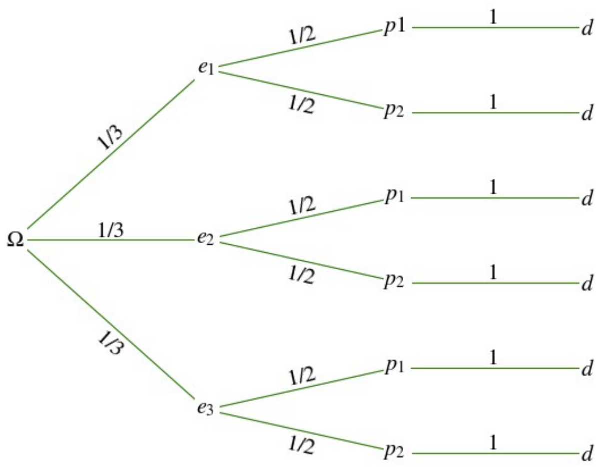
Lorsqu'une expérience aléatoire se compose d'une succession de n épreuves indépendantes E_1 , E_2 , ... , E_n, l'univers des possibles est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$ où Ω_i désigne l'univers de l'épreuve E_i pour i allant de 1 à n.
Une issue de la succession d'épreuves est donc un n-uplet (i_1 ; i_2 ; ... ; i_n) où i_p est une issue de E_p

Exemple :

Un restaurant propose trois entrées e_1, e_2, e_3 , deux plats p_1, p_2, et un dessert d. Un client prend de façon équiprobable une entrée un plat et un dessert. L'univers de cette épreuve est le produit cartésien $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$ où $\Omega_1 = \{ e_1, e_2, e_3 \}$, $\Omega_2 = \{ p_1, p_2 \}$ et $\Omega_3 = \{d\}$

card $\Omega = card\,\Omega_1 \times card\,\Omega_2 \times card\,\Omega_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ issues possibles

On peut représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilité. Chaque chemin représente alors une issue possible et la probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités sur chaque branche :



$P(e_2, p_1, d) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = 1/6$

II- Epreuve de Bernoulli

Définition : Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues :

- l'une que l'on nomme SUCCES notée S de probabilité p
- l'une nommée ECHEC notée $\overline{S}$ de probabilité 1 – p

p est appelé le paramètre de cette épreuve

Exemple : Une urne contient 6 boules rouges, 3 boules jaunes et 1 boule bleue, toutes indiscernables. On tire une boule au hasard . On peut alors qualifier de SUCCES le fait de tirer une boule bleue. Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli avec pour succès S : « tirer une boule bleue » et pour échec $\overline{S}$: « tirer une boule qui n'est pas bleue »

Le paramètre de cette épreuve est $\frac{1}{10}$ (car il y a une boule bleue sur 10 boules)

Définition : On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p. La variable aléatoire X prenant 1 comme valeur si le succès S est réalisé et 0 sinon suit la loi de probabilité (ou **loi de Bernoulli**) suivante :

k	0	1
p(X=k)	1 – p	p

L'espérance de X est E(X) = p , sa variance est V(X) = $p(1-p)$

III- Schéma de Bernoulli

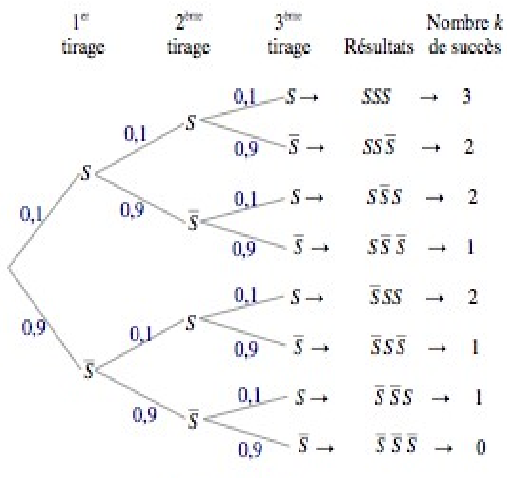
a) Définition

Définition : Si l'on répète n fois de **manière indépendante** une épreuve de Bernoulli, on dit que l'on est en présence d'un **schéma de Bernoulli**

Exemple :

On reprend l'expérience précédente et après avoir tiré une boule, on la replace dans l'urne avant le tirage suivant. Le fait de replacer cette boule assure l'indépendance entre deux tirages et donc si l'on répète trois fois de suite cette expérience, on est alors en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètre 3 et $\frac{1}{10}$

Un arbre permet de visualiser tous les résultats possibles :



Avec trois tirages

La probabilité d'obtenir $SS\bar{S}$ est alors : $P(SS\bar{S}) = P(S)p(S)p(\bar{S})$

$= 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}9$

$= 0{,}009$

Si on note X la variable aléatoire donnant le nombre de succès sur trois tirages, on a alors :

$P(X=2)=P(SS\bar{S}) + P(S\bar{S}S) + P(\bar{S}SS) = 0{,}009+0{,}009+0{,}009 = 3\times 0{,}009 = 0{,}027$

$P(X=2) = \text{nombre de chemin à deux succès} \times \text{probabilité d'un chemin}$

Mais comment procéder si on répète n fois une telle expérience . L'arbre n'est plus réalisable

Définition : On considère un schéma de Bernoulli de n épreuves, représenté par un arbre.

Le nombre de chemin de l'arbre réalisant k succès lors des n répétitions est noté $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n »

Par convention, on a : $\binom{0}{0} = 1$

Remarque : $\binom{n}{k}$ est aussi appelé **coefficient binomial**

A l'aide de l'arbre précédent, compléter : $\binom{3}{0} =$ $\binom{3}{1} =$ $\binom{3}{2} =$ $\binom{3}{3} =$

b) **Loi de probabilité d'un schéma de Bernoulli**

Définition : On considère un schéma de Bernoulli constitué de n épreuves dont la probabilité du succès est noté p et on désigne par X la variable aléatoire associée au nombre de succès lors de ces n épreuves.
On a alors les résultats suivants :

- $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ où k prend les valeurs 0 , 1 , 2 , ... , n
- $E(X) = n\times p$
- $V(X) = n\times p\times(1-p)$
- $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{np(1-p)}$

La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p et on la note B(n;p)

Remarque : La formule donnant P(X = k) est facile à retenir : $p^k(1-p)^{n-k}$ correspond à la probabilité d'un chemin de l'arbre composé de k succès et donc de $n-k$ échecs. Le tout est multiplié par $\binom{n}{k}$ qui correspond sur l'arbre au nombre de chemin donnant k succès sur les n épreuves

Si l'on répète 20 fois l'expérience précédente, on a : P(X=5) =

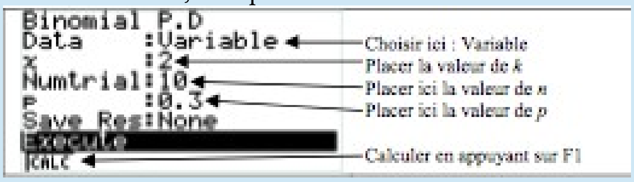
Un point TICE s'impose alors

- **<u>Calcul d'un coefficient binomial</u>**

  On veut calculer le coefficient binomial $\binom{20}{5}$ c'est à dire le nombre de combinaisons de 5 éléments dans un ensemble qui en contient 20

CASIO	TI
1) Taper 20 2) Sélectionner **OPTN** puis **PROB** puis **nCr** 3) Taper 5 puis EXE 4) On obtient $\binom{20}{5}$ = 15504	1) Taper 20 2) Sélectionner **MATH** puis **PRB** puis **nCr (ou combinaison)** 3) Taper 5 puis EXE 4) On obtient $\binom{20}{5}$ = 15504

- **<u>Calcul de P(X = k) et P(X ≤ k)</u>**

<table>
<tr><th colspan="2">CASIO</th><th colspan="2">TI</th></tr>
<tr><td colspan="2">1) Sélectionner MENU STAT
2) Sélectionner DIST puis BINM</td><td colspan="2">1) Sélectionner le MENU DISTRB (2nde VAR)</td></tr>
<tr><td>Pour P (X=k) Sélectionner Bpd</td><td>Pour P (X ≤ k) Sélectionner Bcd</td><td>Pour P (X=k) Sélectionner binomFdp</td><td>Pour P (X ≤ k) Sélectionner binomFrep</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dans les deux cas, compléter l'écran comme suit :

</td><td colspan="2">Il ne reste plus qu'à compléter correctement l'affichage que ce soit avec Fdp ou Frep :

binomFdp (n , p , k)

Attention à retenir l'ordre des paramètres à compléter</td></tr>
</table>

- **<u>Obtenir le tableau donnant la loi de probabilité de X</u>**

<table>
<tr><th colspan="2">CASIO</th><th colspan="2">TI</th></tr>
<tr><td colspan="2">1) Sélectionner MENU RUN
Sélectionner OPTN puis LIST puis Seq
2) Taper alors Seq (X , X , 0 , 20 , 1) → List 1
Vous obtenez en liste 1 tous les entiers de 0 à 20 avec un pas de 1
3) On va alors dans le menu STAT puis DIST puis BINM</td><td colspan="2">On se place dans le menu table de la calculatrice c'est à dire

Y =</td></tr>
<tr><td>Pour obtenir le tableau des P (X=k), on choisit alors Bpd puis</td><td>Pour obtenir le tableau des P (X ≤ k) on choisit alors Bcd puis</td><td>Pour obtenir le tableau des P (X=k), on choisit pour Y1 : binomFdp</td><td>Pour obtenir le tableau des P (X≤k), on choisit pour Y1 : binomFrep</td></tr>
<tr><td colspan="2">Data : List
List : List1
Numtrial : 20
p : 0,1

Attention car alors sur votre calculatrice cela commence à 1 alors que ce devrait être 0</td><td colspan="2">Il ne reste plus qu'à compléter correctement l'affichage que ce soit avec Fdp ou Frep :

binomFdp (20 , 1/10 , X)

Attention à bien régler le Tblset : il doit commencer à 0 avec un pas de 1</td></tr>
</table>