Exercice n° 6 (enseignement obligatoire)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2,1e^{x} + 1,1x + 1,6$$

1. Faites apparaître sur l'écran de votre calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-5 \leqslant x \leqslant 4$, $-4 \leqslant y \leqslant 4$.
   Reproduire l'allure de la courbe obtenue sur votre copie.
2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :
   a. Sur les variations de la fonction f ?
   b. Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
3. On se propose maintenant d'étudier la fonction f.
   a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x} - 2,1e^{x} + 1,1 \geqslant 0$ (on pourra poser $X = e^{x}$).
   b. Étudier les variations de la fonction f.
   c. Déduire de cette étude le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-0,05 ; 0,15]$, de façon à visualiser les résultats de la question **3.**
   Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée y peut-on choisir pour la fenêtre de la calculatrice ?

Exercice 2

Partie A

La fonction g est définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = 1 - e^{-x}.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

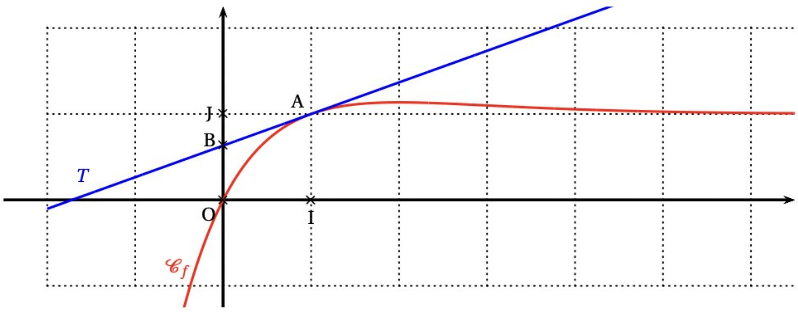
1.
2. Etudier les variations de la fonction g sur $[0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

Partie B

Dans cette partie, k désigne un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x-1)e^{-kx} + 1.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I, J), on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f. Cette courbe est représentée ci-dessous pour une certaine valeur de k.
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1 coupe l'axe des ordonnées en un point noté B.



1. a. Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = e^{-kx}(-kx + k + 1).$$

   b. Démontrer que l'ordonnée du point B est égale à $g(k)$ où g est la fonction définie dans la **partie A**.
2. En utilisant la **partie A**, démontrer que le point B appartient au segment [OJ].

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2+1}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** [redacted]

   b. [redacted]

2. Pour tout réel x, on considère les points M et N de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisses respectives x et $-x$.

   a. Montrer que le point O est le milieu du segment $[MN]$.

   b. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$?

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Exercice n° 22 (enseignement obligatoire)

Partie A

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^{1-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe representative de f dans le plan rapporté un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.

[redacted]

2. Démontrer que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ puis calculer $f'(x)$.
3. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de f.
4. Construire la courbe $\mathscr{C}$ (unité graphique : 2 cm). On admettra que $\mathscr{C}$ est tangente en O à l'axe des ordonnées.