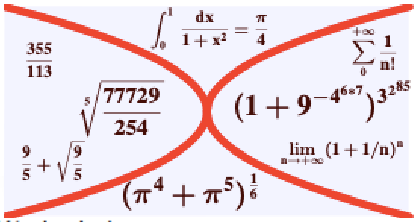


Chapitre 2 : Compléments sur la dérivation

- **Compléments sur la dérivation**

L'étude de la dérivation, commencée en classe de première, est étendue par l'étude de la dérivée d'une fonction composée et l'introduction de la dérivée seconde.

L'étude des fonctions convexes permet de réinvestir et d'enrichir le travail entamé en classe de première sur les dérivées. Elles donnent l'occasion de raisonner en diversifiant les registres : représentations graphiques, tableaux de variations, expressions symboliques.

Contenus

- Composée de deux fonctions, notation $v \circ u$. Relation $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$ pour la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables.
- Dérivée seconde d'une fonction.
- Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe représentative et des sécantes. Pour une fonction deux fois dérivable, équivalence admise avec la position par rapport aux tangentes, la croissance de f', la positivité de f''.
- Point d'inflexion.

Capacités attendues

- Calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule simple mettant en jeu opérations algébriques et composition.
- Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence.
- Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction.
- Esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction f à partir de la donnée de tableaux de variations de f, de f' ou de f''.
- Lire sur une représentation graphique de f, de f' ou de f'' les intervalles où f est convexe, concave, et les points d'inflexion. Dans le cadre de la résolution de problème, étudier et utiliser la convexité d'une fonction.

Démonstration

- Si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Approfondissements possibles

- Courbe de Lorenz.
- Dérivée n-ième d'une fonction.
- Inégalité arithmético-géométrique.

I- Rappel 1ère

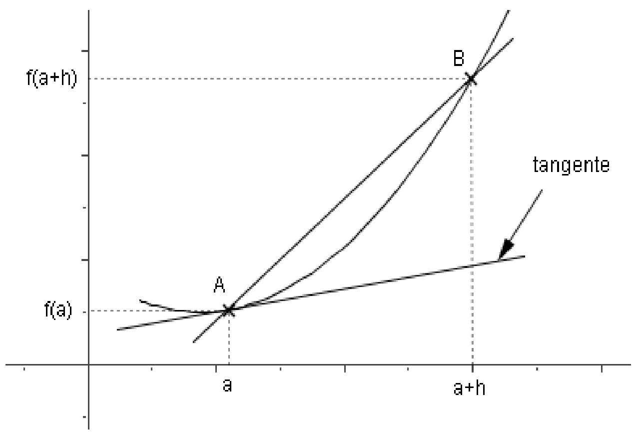
a) Nombre dérivé

Définition Soit I un intervalle contenant un nombre réel a et f une fonction définie sur I

On dit que la fonction f est **dérivable en a** si la limite du rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0, existe et appartient à $\mathbb{R}$

Cette limite est alors notée $f'(a)$ et appelée nombre dérivé de f en a

b) Interprétation géométrique du nombre dérivé



Propriété :

Le nombre dérivée $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point A d'abscisse a.

Equation de la tangente : L'équation de la tangente en a à la courbe représentative d'une fonction f est donnée par : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

c) Fonction dérivée

Tableau de dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f '	définie sur
f(x) = k (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
f(x) = ax + b (affine)	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $(n \geq 1)$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

Opération sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Les règles d'opérations sur les dérivées sont résumées par les formules suivantes :

- dérivée d'une somme : $(u + v)' = u' + v'$
- dérivée d'un produit : $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$
- dérivée d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ (avec v qui ne s'annule pas sur I)
- dérivée de l'inverse : $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ (avec u qui ne s'annule pas sur I)

Remarque : On a vu en classe de première que toute fonction polynôme est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et que toute fonction rationnelle (c'est à dire tout quotient de deux polynômes $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$) est dérivable en tout point de son ensemble de définition

d) Dérivée et étude des variations d'une fonction

Théorème : Soit f une fonction monotone et dérivable sur un intervalle I

- f est strictement croissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) > 0$
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) < 0$
- f est constante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) = 0$

e) Extrémum d'une fonction

Propriété : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.
Si f ' s'annule en a en changeant de signe alors f admet un extremum local en a

II- Dériver des fonctions composées

a) Fonction composée

Définition : Soient u et v deux fonctions de domaine de définition D_u et D_v .
La fonction composée de u par v , notée $v \circ u$, est la fonction définie par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.
L'ensemble de définition de cette fonction est l'ensemble des réels de D_u dont l'image par v appartient à D_v

Exemple : Soit $u(x) = 2x + 6$ et $v(x) = \sqrt{x}$. On a D_u = IR et D_v = [0;+∞[

- **Domaine de définition de** $v \circ u$

  $v(u(x))$ existe ⇔ $u(x) \in D_v$ c'est à dire $2x + 6 \geq 0$ ⇔ $x \geq -3$ donc $D_{v \circ u}$ = [–3;+∞[
- **Expression de la fonction** $v \circ u$

  $v \circ u(x) = v(u(x)) = v(2x + 6) = \sqrt{2x + 6}$

b) Dérivée d'une fonction composée

Propriété Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J tel que pour tout x ∈ I , u(x) ∈ J.
La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et on a $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$

Démonstration proposée page 123

c) Application

Propriété :

- Soit u une fonction **strictement positive et dérivable** sur un intervalle I .

  La fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et on a $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- Soit n un entier relatif non nul et f la fonction définie sur I par $f(x) = (u(x))^n$
  - Si n ≥ 1 , f est dérivable sur I et on a : $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
  - Si n ≤ –1 , f est dérivable sur I dés que u ne s'annule pas et on a $(u^n)' = nu'u^n$
- La fonction f définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I avec $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

Exemple : Déterminer les dérivées des fonctions f et g suivantes :

a) f(x) = $(2x-5)^5$ b) g(x) = $\frac{-3}{(x-2)^4}$ c) $h(x) = e^{-2x^2+4x+5}$ d) $k(x) = \sqrt{2x+6}$

III- Convexité : Approche graphique

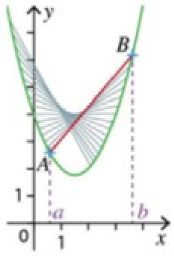
1) Fonctions convexes et concaves

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C sa courbe représentative.

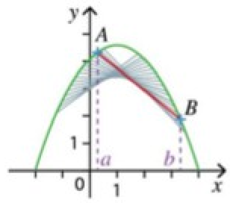
- f est **convexe** sur I si, pour tous réels a et b de I, la portion de la courbe C située entre les points $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$ est **en dessous** de la sécante (AB)
- f est **concave** sur I si, pour tous réels a et b de I, la portion de la courbe C située entre les points $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$ est au-**dessus** de la sécante (AB)

Exemple :

- La fonction représentée ci-dessous est convexe.



- La fonction représentée ci-dessous est concave.



Remarque : Etudier la convexité d'une fonction revient à déterminer sur quel(s) intervalle(s) elle est convexe et sur quel(s) intervalle(s) elle est concave

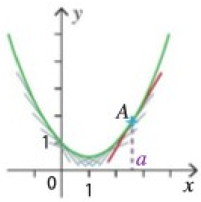
2) Rapport aux tangentes

Propriétés : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative

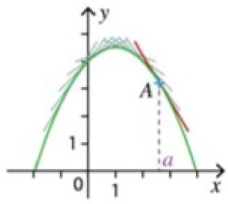
- f est **convexe** sur I si et seulement si la courbe C est **au-dessus** de toutes ses tangentes sur I
- f est **concave** sur I si et seulement si la courbe C est **en-dessous** de toutes ses tangentes

Exemple :

- La fonction f représentée ci-dessous est convexe.



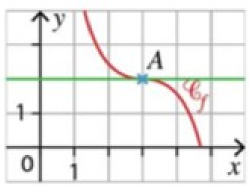
- La fonction g représentée ci-dessous est concave.

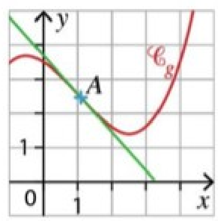


2) Point d'inflexion

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I , C sa courbe représentative et A un point de C. A est un **point d'inflexion** de la courbe C si C admet une tangente en A et si C traverse cette tangente en A

Exemples :





Remarque : En l'abscisse d'un point d'inflexion A de la courbe représentative de f, la fonction change de convexité.

IV – Convexité et dérivation

1) Caractérisation de la convexité

Propriétés : (admises)
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I

Exemple :

C'est une façon très simple de justifier la convexité car il suffit d'étudier les variations de f' d'où la propriété suivante qui est une conséquence de la précédente :

Propriétés : (admises)
Soit f une fonction définie et deux fois dérivables sur un intervalle I.

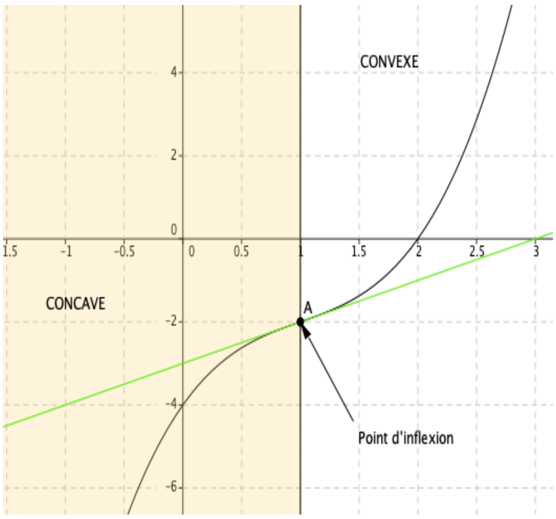
- f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I
- f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I

2) Point d'inflexion et dérivée

Propriétés (admises) : Soit f une fonction définie et dérivable deux fois sur un intervalle I.
On note C sa courbe représentative :

- Si f' change de variation en a alors C admet **un point d'inflexion** au point d'abscisse a
- Si f'' s'annule et change de signe en a alors C admet **un point d'inflexion** au point d'abscisse a

3) Un exemple pour comprendre



Soit f(x) = x^3-3x^2+4x-4 . Etudions la convexité de f .

Sur le graphique ci-contre de la fonction f, on peut conjecturer que f est concave sur]-∞;1] et convexe sur [1;+∞[
Démontrons ce résultat en dérivant f deux fois .
f est un polynôme donc deux fois dérivables.
$f'(x)=3x^2-6x+4$
$f''(x)=6x-6 = 6(x-1)$

On a donc :

- pour tout x ∈]-∞;1] , $f''(x)\leq 0$ donc f est concave
- pour tout x ∈ [1;+∞[, $f''(x)\geq 0$ donc f et convexe

De plus en x = 1 f'' s'annule en changeant de signe donc la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse 1