LE RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

Un exemple pour comprendre

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$

1) Calculer u_1 puis donner des valeurs approchées de u_2 , u_3 , u_4 et u_5
2) Vérifier que $u_1 > 2$, $u_2 > 2$, $u_3 > 2$, $u_4 > 2$, $u_5 > 2$
3) Vérifier que $u_{2016} > 2$. Quel problème rencontre-t-on ?
4) On suppose qu'un mathématicien consciencieux et plutôt courageux a réussi à démontrer que $u_{2016} > 2$
   Démontrer alors que $u_{2017} > 2$ puis que $u_{2018} > 2$
5) Comment pourrait-on alors démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$?

Bilan

Soit P(n) une proposition dépendant d'un entier n

On peut retenir le schéma suivant quand on veut mettre en œuvre un raisonnement par récurrence :

1ère étape : Initialisation : On démontre que P(n) est vraie pour le premier entier n_0

2ème étape : hérédité: On suppose la proposition vraie au rang n et on démontre qu'elle est alors vraie au rang n+1

3ème étape : Par hérédité, la proposition étant vraie au rang n_0 , elle est vraie pour tout $n \geq n_0$

Application

1) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \end{cases}$.

   a) Calculer u_2, u_3, u_4 et conjecturer la forme explicite de u_n
   b) Démontrer votre conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence
   c) En déduire la valeur de $S = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2007$

2) Démontrer par récurrence que la propriété « P(n) : « 2^n est divisible par 3 » » est héréditaire.
   Est-elle vraie pour autant ?