EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.
Elle propose alors à ses $5\ 000$ collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.
En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que $85\ \%$ de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).

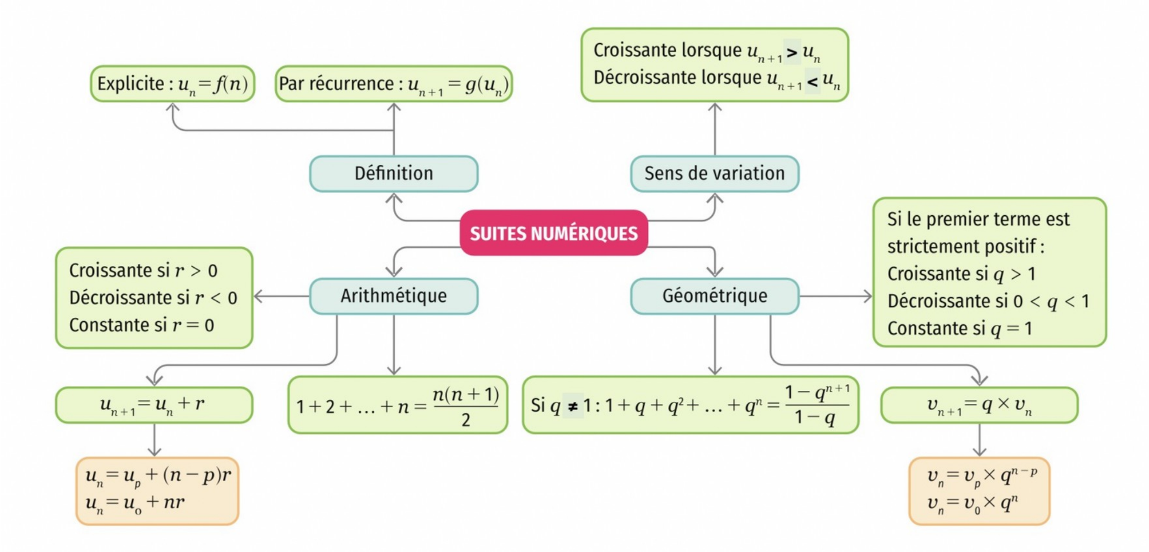
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

1. Calculer a_1.

2. Justifier que pour tout entier naturel n,
$$a_{n+1} = 0,85a_n + 450$$

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$v_n = a_n - 3\ 000$$
- **a.** Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
- **b.** Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
- **c.** En déduire que, pour tout entier naturel n,
$$a_n = -2\ 800\ \times 0,85^n + 3\ 000$$

4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à $2\ 500$, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.



Amérique du nord 2021

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une ile du Pacifique. Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette ile si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$u_0=6$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=0,75\,u_n(1-0,15\,u_n)$

où u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année 2020+n

1) Estimer selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'ile au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=0,75\,x(1-0,15\,x)$

a) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations

b) Résoudre l'équation $f(x)=x$

On remarquera dans la suite de l'exercice que pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1}=f(u_n)$

3) On admet que pour tout entier naturel n , $0\leq u_n\leq 1$

a) Etudier le sens de variation de la suite (u_n)

b) Conjecturer la limite ℓ de cette suite

4) Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

a) Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison ;

b) Le biologiste a programmé en langage python la fonction menace( ) ci-dessous :

```
def menace( ) :
    u=0.6
    n=0
    while u>0.02 :
        u=0.75*u*(1.15*u)
        n=n+1
    return n
```

Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace()

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.