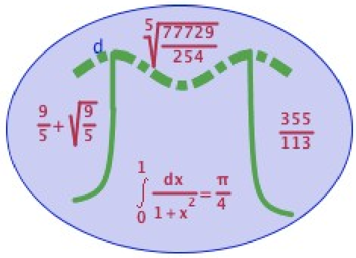


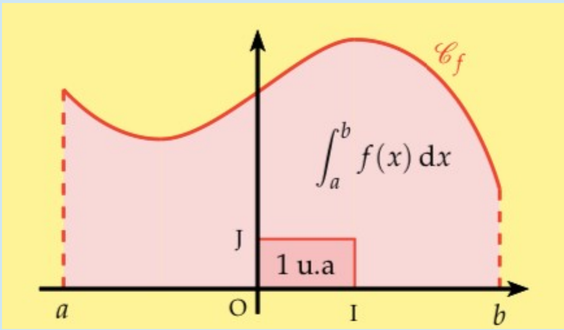
# Calcul Intégral

## I) Intégrale dans le cas d'une fonction continue positive

### a) Définition

**Définition :** Soit f une fonction continue positive sur un intervalle [a;b] et on note $C_f$ sa courbe représentative.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal ( O ; I , J )
On appelle :

- **Unité d'aire (notée u. a. )** : l'aire du rectangle bâti à partir des points O , I et J
- **Domaine sous la courbe** : domaine délimitée par la courbe $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation x = a et x = b ( a ≤ b )
  Ce domaine est l'ensemble des points M ( x ; y ) tels que :
  a ≤ x ≤ b et 0 ≤ y ≤ f(x)
- **Intégrale de f sur [a;b]** : la mesure de l'aire en u. a. du domaine situé sous la courbe $C_f$ .
  On la note : $\int_a^b f(x)\,dx$




**Remarques**

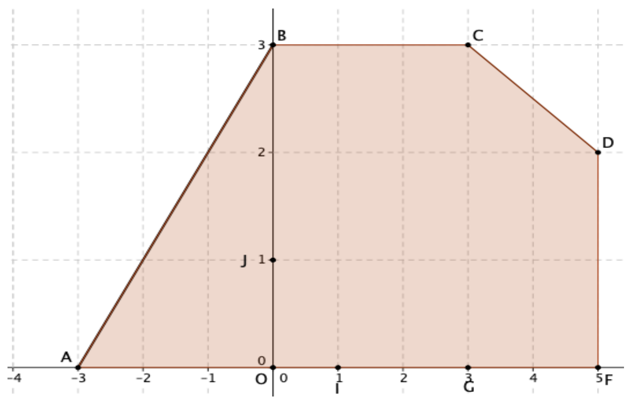
- La variable x ( ou t ou autre) figurant dans l'intégrale est dite « muette » ; elle peut être notée par toute autre lettre. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$

- **Un exemple de calcul**

Le repère est tel que OI= 2 cm et OJ = 3 cm
La courbe est constituée des segments [AB] , [BC] et [CD]
On peut découper l'aire sous la courbe par le triangle OAB d'aire $\frac{3\times 3}{2}=4{,}5$ u.a. , le rectangle BCGO d'aire $3\times 3=9$ u.a. et le trapèze CDFG d'aire $\frac{(FD+CG)\times GF}{2}=\frac{(2+3)\times 2}{2}$ = 5 u.a.

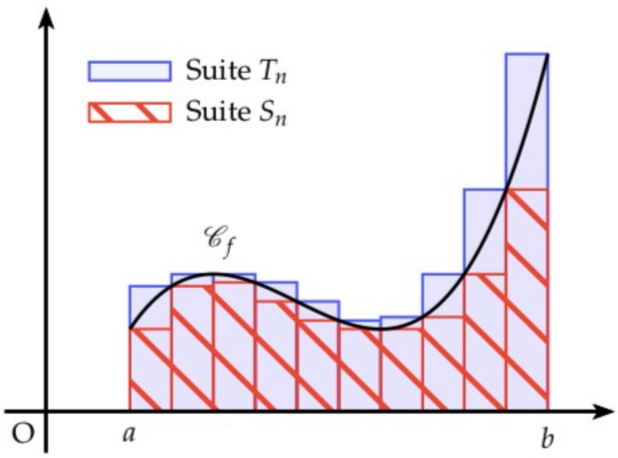
On a donc $\int_a^b f(x)\,dx$ = 4,5+9+5 = 18,5 u.a.

1 u.a. = 6 $cm^2$ donc l'aire sous $C_f$ est de $18{,}5\times 6=111$ $cm^2$



## b) Calcul d'une intégrale par la méthode des rectangles

Dans le cas d'une fonction continue et positive sur un intervalle [a;b], une méthode pour calculer l'aire du domaine sous la courbe est d'encadrer celle-ci par deux suites de rectangles . On découpe pour cela l'intervalle [a;b] est n parties égales . L'aire recherchée est alors comprise entre l'aire des rectangles hachurées et l'aire des rectangles bleus.




L'approximation de l'intégrale par des aires de rectangles vaut $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ , $\Delta x_i$ étant la largeur des rectangles et $f(x_i)$ leur hauteur. Cette somme tend vers $\int_a^b f(x)dx$ quand n tend vers +∞

## c) Fonction définie par une intégrale

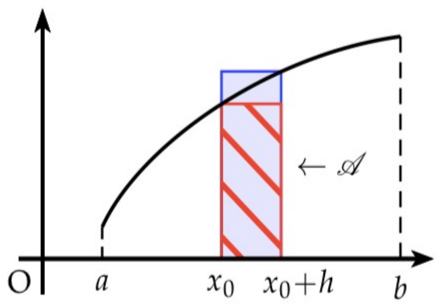
**Théorème fondamentale de l'intégration**

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [ a ; b ] . La fonction F définie sur [a;b] par F(x) = $\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur [ a ; b ] qui s'annule en a

**Remarque** F est donc une PRIMITIVE de f

**Démonstration**

Ce théorème est admis dans le cas général.
On va le démontrer dans le cas d'une fonction positive et croissante.




- On peut déjà remarquer que F(a) = 0
- Cherchons à encadrer $F(x_0+h)-F(x_0)$ .

  On a :

$$\leq \quad F(x_0+h)-F(x_0) \quad \leq$$

$$\leq \quad F(x_0+h)-F(x_0) \quad \leq$$

D'où pour h > 0 , on a $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} =$

On a donc $\lim_{h \to x_0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} =$

## II- Intégrale d'une fonction continue

On étend le théorème fondamental vu précédemment aux fonctions continues non nécessairement positives

**Théorème** Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I .

Pour tous réels a et b de I , on a : $\int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

**Démonstration :**

La fonction f étant continue sur I alors elle admet une primitive G sur I qui s'annule en a .

On a alors $G(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ d'où $G(b) = \int_a^b f(x)\,dx$

Soit F une primitive **quelconque** de f sur I. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante donc $F(x)=G(x)+k$ . On a alors $F(a)=G(a)+k=0+k=k$ d'où $G(b)=F(b)-k=F(b)-F(a)$

d'où $G(b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ qui se note $[F(x)]_a^b$

**Exemples :**

a) Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_{-1}^{2} x^3-2x+3\,dx$

$$I = \left[\frac{x^4}{4}-x^2+3x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{2^4}{4}-2^2+3\times2\right)-\left(\frac{(-1)^4}{4}-(-1)^2+3\times(-1)\right)$$

$$= 4-4+6-\frac{1}{4}+1+3 = \frac{39}{4} \text{ u.a.}$$

b) Calculer $\int_0^1 \frac{2x}{(3x^2-1)^2}\,dx$

$$\int_0^1 \frac{2x}{(3x^2-1)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3}\times\frac{6x}{(3x^2-1)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3}\times\frac{u'}{u^2}\,dx = \left[\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3x^2-1}\right)\right]_0^1 = -\frac{1}{6}-\frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$$

## III- Propriétés de l'intégrale

**Propriétés algébriques** Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c trois réels

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. **Relation de Chasles** $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$
3. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

**Démonstration**

- La première propriété est évidente si on interprète en aire
- **la relation de Chasles**

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = F(b)-F(a)+F(c)-F(b) = F(c)-F(a) = \int_a^c f(x)\,dx$$

- D'après la relation de Chasles, $\int_a^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx$

$$0 = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx$$

$$\text{d'où} \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

**Linéarité** Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a;b]

Pour tout réel $\alpha$ et $\beta$, on a : $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$

**Exemple :** Si on sait que $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx = 6$ et $\displaystyle\int_1^5 g(x)\,dx = 5$, on peut alors calculer

$$\int_1^5 3f(x)-8g(x)\,dx = 3\int_1^5 f(x)\,dx - 8\int_1^5 g(x)\,dx = 3\times 6-8\times 5 = -22$$

**Intégrales et inégalités** Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle [a;b]

- **positivité** Si $f(x) \geq 0$ sur [a;b] alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- **Ordre** Si $f(x) \leq g(x)$ sur [a;b] alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

**Démonstration :**

- **positivité** : Facile cela vient de l'interprétation d'une intégrale comme une aire
- **Ordre**

  $f(x) \leq g(x)$ donc $g(x) - f(x) \geq 0$ et par positivité de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(x)-f(x)\,dx \geq 0$ d'où par linéarité il vient $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ ce qui donne $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

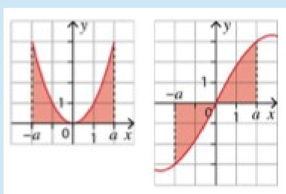
**Un exemple d'application**

Vous voulez connaître un encadrement de $\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$, intégrale que l'on ne peut pas calculer car on ne peut trouver de primitive de $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$.

| | |
|---|---|
| On cherche donc à encadrer $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ sur l'intervalle $[1;9]$:<br>$1 \leq x \leq 9$<br>$\sqrt{1} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{9}$<br>$1+1 \leq 1+\sqrt{x} \leq 1+3$<br>$\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{2}$ | On a donc alors d'après l'inégalité de la moyenne :<br>$\dfrac{1}{4}(9-1) \leq \displaystyle\int_1^9 f(x)\,dx \leq \dfrac{1}{2}(9-1)$<br>$2 \leq \displaystyle\int_1^9 f(x)\,dx \leq 4$ |

**Parité d'une fonction**

- Si f est **paire** alors pour tout $a \in I$ : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$
- Si f est **impaire** alors pour tout $a \in I$ : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$



**Démonstration :** Ces deux résultats se démontrent aisément si on raisonne en terme d'aires

## IV- Intégration par parties

**Le principe**

Soit u et v deux fonctions dérivables sur [a;b] de dérivées $u'$ et $v'$ continues alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Démonstration :

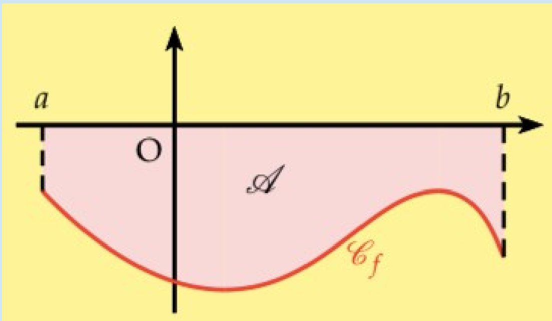
Si u et v sont dérivables sur [a;b] alors uv est dérivable et on a : $(uv)'=u'v+uv'$ d'où on peut écrire $uv'=(uv)'-u'v$

Comme $u'$ et $v'$ sont continues , on peut intégrer la dernière égalité ce qui donne :

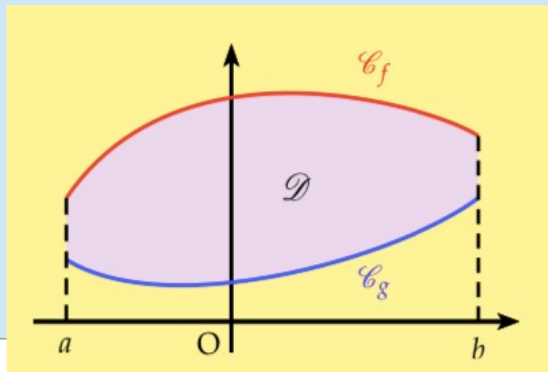
$$\int_a^b uv'dx = \int_a^b (uv)'dx - \int_a^b u'v\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,dx$$

## V- Application : Intégrale et aire

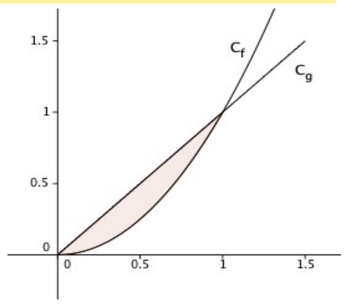
- Soit f une fonction continue sur un intervalle [a;b] telle que f soit négative. Si on appelle A l'aire du domaine délimitée par la courbe $C_f$ l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b , on a alors : A = $-\int_a^b f(x)dx$




- Soient f et g deux fonctions continues sur [a;b] telles que f ≥ g . Si on appelle D l'aire du domaine délimitée par les deux courbes et les droites d'équations x = a et x = b, on a alors D = $\int_a^b f(x)-g(x)dx$




**Exemple :** Si vous voulez calculer l'aire coloriée sur la figure ci-dessous avec $f(x)=x^2$ et $g(x)=x$ , il suffit de calculer A= $\int_0^1 g(x)-f(x)dx$




A = $\int_0^1 x-x^2dx = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{0}{2}-\frac{0}{3}\right) = \frac{1}{6}$ u. a.

**Valeur moyenne d'une fonction continue**

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a;b]

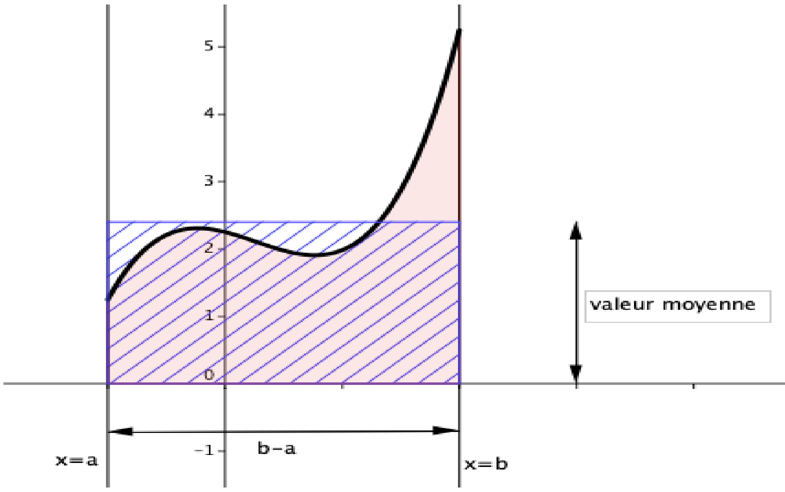
**La valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle [a;b] est le réel défini par

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Si f est une fonction continue et positive sur [a;b]

$\int_a^b f(x)\,dx$ peut s'interpréter comme une aire.

Si on veut assimiler cette aire à l'aire d'un rectangle dont l'un des côtés est $b-a$, l'autre côté a alors pour longueur $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$




Cette valeur moyenne de l'intégrale correspond donc à la hauteur du rectangle de base $b-a$ ayant la même aire que l'aire sous la courbe de la fonction f entre a et b