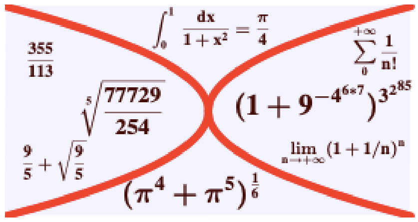


Chapitre 12 : Dénombrement

I- Le langage des ensembles

Définition

Un ensemble est une collection d'éléments que l'on peut énumérer ou définir par une propriété. Il est généralement noté par une majuscule (A , B , C ...) et ses éléments par une minuscule a , b, c , ...

Certains ensembles ont des notations particulières comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

- Un ensemble est défini **par extension** si l'on énumère tous ses éléments : E = { a ; b ; c ... }
- Un ensemble est défini **par compréhension** si ses éléments sont définis par une propriété :
  Par exemple, E={x ∈ A , P(x) } qui se lit ensemble des éléments de A vérifiant la propriété P

L'ensemble ne contenant aucun élément s'appelle **l'ensemble vide** noté $\varnothing$.

Exemples :

- { 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; ..... } ensemble des nombres pairs
- { n ∈ $\mathbb{N}$, 1 ≤ n ≤ 49 } : Ensemble des numéros à l'ancien loto

Appartenance, inclusion, partie d'un ensemble

Soit E un ensemble non vide

- Si un élément a appartient à E on écrit : a ∈ E
- Si un ensemble F est inclus dans E , F est un sous ensemble de E ou une partie de E et on écrit $F \subset E$

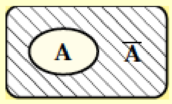
On a par exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Si E = { a , b , c } l'ensemble des parties de E est composé de :
{ $\varnothing$, {a} , {b} , {c} , {a,b} , {a,c} , {b,c} , E }

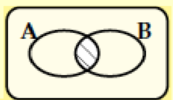
Complémentaire, intersection et réunion

Soit E un ensemble non vide

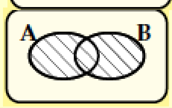
- Complémentaire de A dans E noté $\overline{A}$
  $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in E \text{ et } x \notin A$



- Intersection de A et B : $A \cap B$
  x ∈ $A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$



- Réunion de A et de B : $A \cup B$
  x ∈ $A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ OU } x \in B$



- $\overline{E}$ = ... et $\overline{\varnothing}$ = ...
- A et B sont disjoints si et seulement si $A \cap B$ = ...
- Si $A \cup B$ = B alors ... ...
- Si $A \cap B$ = B alors ... ...

II- Produit cartésien

Définition

- Le produit cartésien de deux ensembles E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x;y)$ tels que x ∈ E et y ∈ F.
- On généralise ce produit cartésien à p ensembles : $E_1 \times E_2 \times .. \times E_p$ où les éléments sont des **p-upplets** $(x_1, x_2, ..., x_p)$ tel que pour tout entier i ∈ [1;p], $x_i \in E_i$
- Lorsqu'il s'agit du même ensemble, on note alors : $E^p = E \times E \times .. \times E$ et les p-upplets sont alors appelés des **p-listes**

Un couple d'entiers naturels est un élément de $\mathbb{N}^2$
Les coordonnées d'un point dans le plan font parties de $\mathbb{R}^2$ et dans l'espace elles font parties de $\mathbb{R}^3$.

Principe additif , multiplicatif
On note card(E) le nombre d'éléments d'un ensemble fini E

- **principe additif** : si $E \cap F = \emptyset$ alors card($E \cup F$) = card(E) + card(F)
- **principe multiplicatif** : $card(E \times F) = card(E) \times card(F)$

Un jeu consiste à tirer un boule dans une urne qui en contient 4 puis un jeton dans un sac qui en contient 3. On applique donc le principe multiplicatif pour connaître le nombre de tirages possibles : $4 \times 3 = 12$ tirages possibles.

III- Dénombrons avec des p-listes

Nombres de p-listes
Le nombre de p-listes d'un ensemble E à n éléments est n^p

Une p-liste peut être associée à p tirages **successifs** avec remise dans une urne qui contient n boules . A chaque tirage , on a n possibilités et on effectue p tirages d'où n^p

Exemple : Le nombre de code d'un cadenas à 4 chiffres est de 10^4

Nombre de permutations
Soit E un ensemble de cardinal n.
Une permutation de E est une n-liste d'éléments distincts de E .
Il y en a n! (se lit n factorielle) avec :
$n! = n \times (n-1) \times .. \times 2 \times 1$

Une permutation peut être assimilée à un tirage successif **sans** remise de **n boules** dans une urne qui contient **n boules**
Exemple : Le nombre d'anagramme de PYTHAGORE est une permutation des 9 lettres . Il y en a
$9! = 9 \times 8 \times .. \times 2 \times 1$

Nombre de p-listes d'éléments distincts : les Arrangements

Soit E un ensemble à n éléments.

Le nombre de p-listes d'éléments **distincts** de E est égal à :

$$n\times(n-1)\times..\times(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Un arrangement peut être assimilé à un tirage **successif** sans remise de **p boules** dans une urne qui contient **n boules**

Un exemple classique est le tiercé. Prenons une course de 18 chevaux. Une arrivée du tiercé peut être assimilée au nombre de 3-listes d'un ensemble qui en contient 18 .

Il y en a donc $\frac{18!}{(18-3)!} = \frac{18!}{15!} = 18\times17\times16 = 4896$

IV- Combinaisons

a) Coefficients binomiaux

Nombre de combinaisons

Soit E un ensemble de n éléments et p un entier naturel ≤ n

Une combinaison de p éléments de E est une partie de E à p éléments.

Le nombre de combinaison de p éléments de E , noté $\binom{n}{p}$, est égal à : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Une combinaison de p éléments de E peut être assimilé à un tirage **simultané** de **p boules** dans une urne qui contient **n boules**.

Imaginons un loto où il faut obtenir 6 numéros sur un ensemble de 49 numéros. Le nombre de combinaisons gagnantes est donc de $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(43!)} = \frac{49\times48\times47\times46\times45\times44}{6\times5\times4\times3\times2\times1}$ = 13 983 816

b) Propriétés de $\binom{n}{p}$

Pour tout entier naturel n et p avec $0\le p\le n$, on a :

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ 2) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ 3) $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

4) Relation de Pascal : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Ces égalités s'interprètent facilement en partie d'un ensemble à n éléments

Construire une partie à p éléments de E revient à construire une liste à $n-p$ éléments de E d'où l'égalité 3

La relation de Pascal

1) La démonstration peut se faire directement avec la formule :

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \frac{n!(p+1)+n!(n-p)}{(p+1)!(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = \binom{n+1}{p+1}$$

2) On peut aussi utiliser le nombre de partie d'un ensemble.

Considérons un ensemble à n+1 éléments et on veut dénombrer le nombre de parties à p+1 éléments de cet ensemble.

1ère façon **:** Il y en a $\binom{n+1}{p+1}$.

2ème façon **:** Considérons un élément a de E . Les parties de E sont alors constituées de celles contenant a et celles ne le contenant pas.

- Les parties de E à p+1 éléments contenant a sont alors formés de p éléments de E parmi les n restants. Il y en a $\binom{n}{p}$
- Les parties de E ne contenant pas a sont donc formées de p+1 éléments à choisir parmi p éléments. Il y en a $\binom{p+1}{n}$

D'où la relation de pascal : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

c) <u>Le triangle de Pascal</u>

En utilisant la propriété (2) et en disposant les coefficients $\binom{n}{p}$ en triangle on obtient de proche en proche la valeur de ces coefficients :

	p =0	p =1	p =2	p = 3	p =4	p = 5	p =6	....
n = 0	$\binom{0}{0}$							
n = 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
n = 2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
n = 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
n = 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
n = 5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		
n = 6								

$\Leftrightarrow$

p =0	p =1	p =2	p = 3	p =4	p = 5	p =6	....
1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	**4**	**6**	4	1			
1	5	**10**	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$$

IV- Nombre de parties d'un ensemble

Nombre de parties d'un ensemble

Soit E un ensemble de cardinal n. Le nombre de parties de cet ensemble est égal au nombre de n-uplets de l'ensemble { 0 ; 1 }. Il y en a 2^n .

On a alors la relation : $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$

La démonstration peut se faire par récurrence (voir activité) mais on peut aussi faire une analogie avec l'ensemble à deux éléments { 0 ; 1 } .

Prenons un ensemble à n éléments { e_1 ; e_2 ; ... ; e_n }.

Pour construire un sous ensemble de E, on peut alors décider d'affecter 0 à l'élément si on ne le s sélectionne pas et 1 si on le sélectionne . Ainsi , (1,1,0,...,0) correspond à { e_1 ; e_2 } , (1;1 ;...;1) correspond à E . Le nombre d'élément de E correspond donc au nombre de n-listes d'éléments pris dans l'ensemble { 0 ; 1 } . Il y en a 2^n .

On peut cependant aussi utiliser les combinaisons :

- nombre de listes à 0 élément : $\binom{n}{0}$
- nombre de listes à 1 élément : $\binom{n}{1}$
- nombre de listes à 2 éléments : $\binom{n}{2}$

  ... ...

- nombre de listes à n éléments : $\binom{n}{n}$

Le nombre de partie de E est donc $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$

On a donc la relation demandée : $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$