Produit scalaire dans l'espace et application

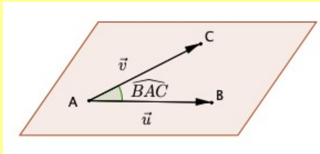
I- Produit scalaire dans le plan et l'espace

1) Extension du produit scalaire à l'espace

Les règles du produit scalaire de deux vecteurs rencontrées dans le plan s'étendent à l'espace dès que l'on se situe dans un plan où ces deux vecteurs peuvent être représentés :

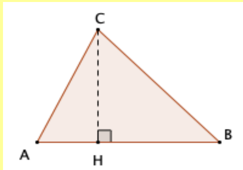
Propriétés:

1) Par le cosinus :



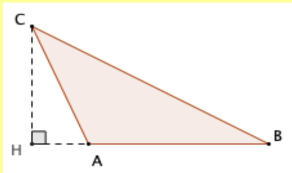
$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\widehat{BAC}) = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$$

2) Par projection orthogonale :



Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB)

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB\times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire



3) Par les normes : formule de polarisation

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$$

4) A l'aide des coordonnées :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = xx'+yy'+zz'

Remarques : En particulier, $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(\widehat{BAB}) = \|\vec{u}\|^2\times\cos(0) = \|\vec{u}\|^2$

$\vec{u}\cdot\vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$ et est appelé le carré scalaire de $\vec{u}$

Exemples :

1) Soit $\vec{u}(2;\sqrt{2};-1)$ et $\vec{v}$ $(-1;-\sqrt{2};1)$

- On peut calculer le produit scalaire avec les coordonnées :

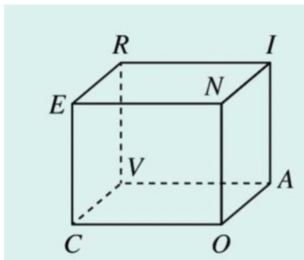
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times(-1)+\sqrt{2}\times-\sqrt{2}+(-1)\times1 = -2-2-1 = -5$$

- On peut alors calculer la mesure de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$ avec la formule du cosinus :

$$\begin{cases}\|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+\sqrt{2}^2+(-1)^2}=\sqrt{7}\\ \|\vec{v}\|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{4}\end{cases}$$ on a alors : $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \dfrac{-5}{\sqrt{7}\times\sqrt{4}} = \dfrac{-5}{\sqrt{28}}$

on a alors $(\vec{u};\vec{v}) = \text{acos}\left(\dfrac{-5}{\sqrt{28}}\right) \approx 160{,}89°$

2) Dans ce pavé, CO=3, CE=AO=2 .



$$\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CO} = CO^2 = 9$$

Ici le vecteur $\overrightarrow{CO}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{CN}$ sur la direction de $\overrightarrow{CO}$

2) Premières propriétés

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et a et b deux réels

- **Propriété de symétrie :** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- **Propriété de bilinéarité :** $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(a\,\vec{u}).(b\,\vec{v})=(ab)\times(\vec{u}\,.\,\vec{v})$

Remarque : Ces deux propriétés permettent de retrouver des règles de développement avec le produit scalaire :

Exemple : Soit $\|\vec{u}\|=2$, $|\vec{v}|=3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-4$

- $(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(-\vec{u}+\vec{v}) = -\vec{u}^2+\vec{u}\cdot\vec{v}-2\vec{v}\cdot\vec{u}+2\vec{v}^2 = -2^2+(-4)-2\times(-4)+2\times3^2 = -4-4+8+18=18$
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2 = 2^2-8+9 = 5$
- $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2-\vec{v}^2 = 4-9 = -5$

Colinéarité et orthogonalité

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Remarque : La propriété d'orthogonalité est l'une des plus importante à connaître et à savoir utiliser

Exemple : Soit $A(1;-1;-1)$, $B(0;3;4)$ et $C(1;2;5)$

$\overrightarrow{AB}(-1;4;5)$ et $\overrightarrow{BC}(1;-1;1)$. On a donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -1\times1+4\times(-1)+5\times1 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est rectangle en B

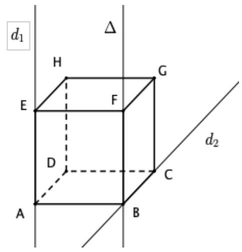
II- Orthogonalité dans l'espace

1) Droites orthogonales

Deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2} = 0$

Remarque : A noter une distinction de vocabulaire dans l'espace entre perpendiculaire et orthogonale. Dire que deux droites sont **perpendiculaires** signifie que ces deux droites sont **sécantes** en formant un angle droit. Par contre deux droites peuvent être orthogonales sans être sécantes. Il faut alors que leur parallèles respectives passant par un même point de l'espace soit perpendiculaires :

d_1 et d_2 sont orthogonales car la droite Δ parallèle à d_1 et passant par B est perpendiculaire à d_2 .



2) Droite et plan orthogonaux

Propriété :
Une droite Δ de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale à un plan P de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si $\vec{n}\cdot\vec{u} = 0$ et $\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$

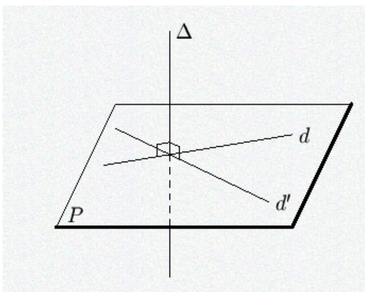
Remarques

- Une autre formulation peut être :

  une droite est orthogonale à un plan

  $\Leftrightarrow$

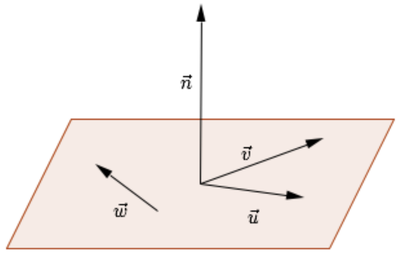
  elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan
- Le vecteur $\vec{n}$ est alors appelé **un vecteur normal** du plan P



Conséquence : Imaginons une droite D du plan P de vecteur directeur $\vec{w}$.
La droite étant dans le plan P, le vecteur $\vec{w}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ c'est à dire $\vec{w}=a\,\vec{u}+b\,\vec{v}$.

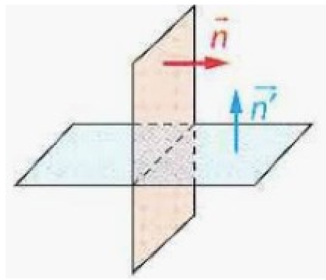
On a alors $\vec{n}\cdot\vec{w} = \vec{n}\cdot(a\,\vec{u}+b\,\vec{v}) = a\,\vec{n}\cdot\vec{u}+b\,\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$.

Ainsi la droite Δ est orthogonale à D et on a donc :



> Si une droite d est orthogonale à un plan, elle est orthogonale à toute droite de ce plan

3) Plans orthogonaux



> Deux plans P et P' de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{n}\cdot\vec{n}' = 0$

Remarque

C'est une façon très simple pour démontrer que des plans sont orthogonaux

III- Equation cartésienne de plan

a) Propriété

> **Propriété :** Le plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$

Soit P de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Comme M est dans le plan P, on a $\overrightarrow{AM}=a\,\vec{u}+b\,\vec{v}$ et si on calcule alors $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}$, on obtient 0 après développement vu que $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$ et $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$

C'est cette propriété qui permet de donner une équation cartésienne à un plan :

> **Propriété :** Soit P un plan passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.
> P admet une équation cartésienne de la forme $ax+yb+cz+d=0$

Démonstration : Une démonstration qui se fait par double implication

- $\Rightarrow$ Soit P un plan passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.

Pour tout point $M(x;y;z)$ du plan on a donc : $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ c'est à dire :

$$(x-x_A)\times a+(y-y_A)\times b+(z-z_A)\times c=0$$
$$ax+by+cz-ax_A-by_A-cz_A=0$$

En posant d= $-ax_A-by_A-cz_A$, on retrouve $ax+by+cz+d=0$

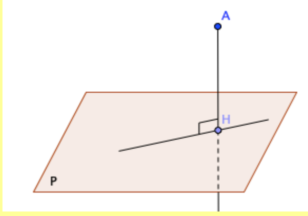
- Réciproquement, Soit M l'ensemble des points du plan qui respectent l'équation $ax+by+cz+d=0$.

  On peut supposer a , b , c non tous nuls donc en prenant a ≠ 0, le point A de coordonnées $\left(-\frac{d}{a};0;0\right)$ vérifie $ax+by+cz+d=0$ d'où $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ ax_A+by_A+cz_A+d=0 \end{cases}$ et par soustraction il vient : $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$ c'est à dire $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ en posant $\vec{n}(a;b;c)$ ce qui correspond à la caractérisation du plan passant par A de vecteur directeur $\vec{n}$

b) Distance d'un point à un plan

Propriété: Soit A un point de l'espace.

Le projeté orthogonal du point A sur une droite d ou sur un plan P est **le point H** , point d'intersection de la droite d ou du plan P avec la perpendiculaire à cette droite ou ce plan



Remarques Soit A un point de l'espace, d une droite et P un plan .

La plus petit distance du point A à la droite d (ou au plan P) est la distance AH où H est le projeté orthogonal du point A sur la droite d (ou le plan P)

Application

Soit P le plan d'équation $2x-y+3z+2=0$ et A le point de coordonnées $A(7;0;4)$
Déterminer la distance du point A au plan P

Soit H le projeté orthogonal de A sur le plan P. La droite (AH) est donc orthogonale au plan P. **Un vecteur directeur** $\vec{u}$ de (AH) est donc **un vecteur normal** de P donc $\vec{u}(2;-1;3)$.

La droite (AH) a donc pour équation $\begin{cases} x=7+2t \\ y=\quad -t \\ z=4+3t \end{cases}$. Le point H a donc des coordonnées qui vérifient l'équation de la droite et du plan d'où : $2(7+2t)-(-t)+3(4+3t)+2=0$ ce qui donne $14t+28=0$ d'où t = -2 et H a pour coordonnées : $\begin{cases} x=7+2\times(-2)=3 \\ y=-(-2)=2 \\ z=4+3\times(-2)=-2 \end{cases}$ cad $H(3;2;-2)$

On a alors $AH=\sqrt{(x_H-x_A)^2+(y_H-y_A)^2+(z_H-z_A)^2} = \sqrt{(3-7)^2+(2-0)^2+(-2-4)^2} = \sqrt{16+4+36} = \sqrt{56}$