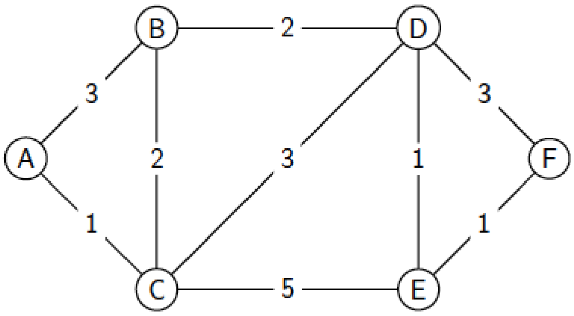
Calcul du plus court chemin entre deux points	
Localisation , Cartographie et mobilité	**Comprendre et appliquer l'algorithme de Dijkstra**

PARTIE A Le principe

Imaginer :

- vous êtes livreur de pizzas mais vous avez moins d'une demi-heure pour les livrer avec un scooter faiblard et poussif
- vous vous rendez, valises à la main, à la gare à pied , vous ne savez pas trop quel chemin prendre mais vous voulez épargner vos bras et vos pieds
- ou encore , c'est l'histoire d'internet qui permet le transfert de données dans le monde entier via ... quelle route au fait ?

Ainsi , parler de calculer un itinéraire, c'est parler du problème du plus court chemin dans un graphe . Vous désirez vous rendre du nœud A au nœud F mais en faisant le moins de kilomètres possibles, les kilomètres étant représentés par les nombres



Edsger Dijkstra (on prononce D – Ail – k – stra) s'intéressa à ce problème du plus court chemin sur un graphe. Il proposa en 1959 un algorithme permettant de résoudre ce problème mais il fallut attendre 28 ans, en 1987, pour qu'une autre référence dans le monde des graphes , Tarjan , propose une version « moderne » de cet algorithme de Dijkstra. C'est celui-ci que nous allons étudier dans la suite .

On va donc rechercher sur le graphe précédent, le plus court chemin permettant d'aller de A à F

Etape 1 :

- On démarre du sommet A , on indique 0 dans la case car on a parcouru 0
- on ne reviendra plus en A donc on considère le sommet comme traité et place des croix
- on peut atteindre B distant de 3 ou C distant de 1 donc on indique 3-A et 1-A
- on conserve alors le plus court c'est à dire 1-A

A	B	C	D	E	F
0	3-A	1-A			
x		1-A			
x					
x					
x					
x					

Etape 2 :

- On redémarre donc de C. On ne reviendra plus en C donc on place les croix
- De C, on peut atteindre D, E ou B
  - si on va en D, on parcourt 3 en plus donc depuis le départ 1+3=4, on écrit 4-C
  - si on va en E, on parcourt 5 en plus donc depuis le départ 1+5=6 et on écrit 6-C
  - si on va en B, on parcourt 2 en plus donc depuis le départ 1+2=3 et on écrit 3-C
- On conserve le plus court et ici on a le choix entre 3-A ou 3-C prenons 3-A

A	B	C	D	E	F
0	3-A	1-A			
x	3-C	1-A	4-C	6-C	
x	3-A	x			
x		x			
x		x			
x		x			

Etape 3 :

- On redémarre donc de B, on n'y reviendra plus donc on place les croix
- on ne peut atteindre que D distant de 2 donc depuis le départ 3+2=5 et on écrit 5B
- On conserve le plus court c'est à dire 4-C

A	B	C	D	E	F
0	3-A	1-A			
x	3-C	1-A	4-C	6-C	
x	3-A	x	5-B		
x	x	x	4-C		
x	x	x			
x	x	x			

Etape 4 :

- On redémarre donc de D, on n'y reviendra plus donc on place les croix
- on peut atteindre E et F donc comme précédemment on indique les distances parcourues : 5-D et 7-D
- On conserve le plus court c'est à dire 5-D

A	B	C	D	E	F
0	3-A	1-A			
x	3-C	1-A	4-C	6-C	
x	3-A	x	5-B		
x	x	x	4-C	5-D	7-D
x	x	x	x	5-D	
x	x	x	x		

Etape 5 :

- On redémarre donc de E, on n'y reviendra plus donc on place les croix
- on peut atteindre F donc comme précédemment on indique la distance parcourue : 6-E
- On conserve le plus court c'est à dire 6-E

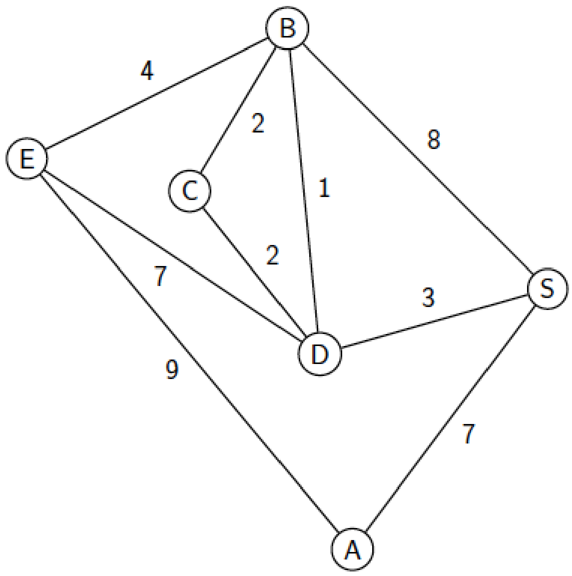
A	B	C	D	E	F
0	3-A	1-A			
x	3-C	1-A	4-C	6-C	
x	3-A	x	5-B		
x	x	x	4-C	5-D	7-D
x	x	x	x	5-D	6-E
x	x	x	x	x	6-E

Dernière étape :

Il ne reste plus qu'à décrire le plus court chemin et pour cela on remonte l'algorithme :
on part de F , 6-E , 5-D , 4-C , 1-A donc le plus court chemin est A C D E F de distance 6

PARTIE B Spectacle de fin d'année

Naïma fait partie d'une école de musique.
En vue du spectacle de fin d'année, elle souhaite déposer à vélo des affiches publicitaires sur les panneaux de sa ville.
Les pistes cyclables reliant ces panneaux sont représentées sur le graphe ci-contre.
Le sommet E désigne son école de musique, le sommet S la salle de spectacle et les sommets A, B, C, et D les panneaux d'affichage. Lorsqu'elle a déposé ses affiches, Naïma a relevé le temps de trajet entre chaque panneau d'affichage. Ces durées, exprimées en minutes, sont indiquées sur les arêtes du graphe.



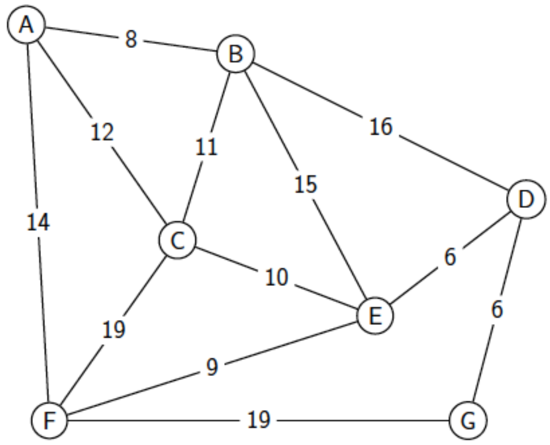
Indiquer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le chemin permettant à Naïma de se rendre le plus rapidement possible de son école de musique à la salle de spectacle le soir de la représentation.

Donner la durée de ce parcours.

PARTIE C L'agent immobilier

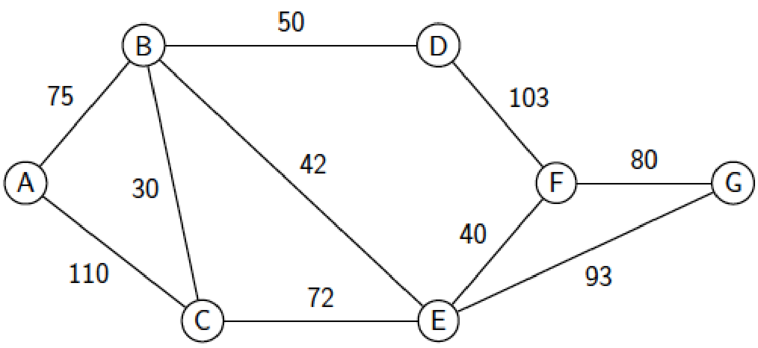
Un agent immobilier doit visiter plusieurs biens à vendre dans une ville.
Le graphe ci-contre représente le plan de la ville.
Les biens à visiter sont identifiés par les lettres A, B, C, D, E, F et G.
Les poids des arêtes sont les durées de parcours, en minutes, entre deux biens.
Lorsque l'investisseur immobilier termine ses visites par le bien A, il souhaite revenir au bien G le plus rapidement possible.

Déterminer ce plus court chemin en utilisant l'algorithme de Dijkstra.
Quelle est sa durée en minutes ?



Partie D Au centre de vacances

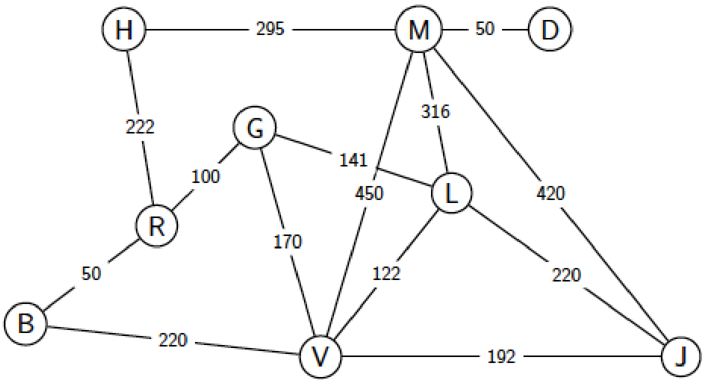
Le graphe ci-dessous représente le plan d'un centre de vacances. Les arêtes représentent les allées et les sommets, les carrefours. On a indiqué sur chaque arête la longueur en mètres des allées entre deux carrefours.



Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet le plus court pour aller du carrefour A au carrefour G.

Partie E Voyage en Islande

Sarah, une jeune étudiante en géologie, souhaite partir en voyage en Islande avec des amis. Elle a loué une voiture tout terrain pour pouvoir visiter les lieux remarquables qu'elle a sélectionnés. Sarah a construit le graphe ci-dessous dont les sommets représentent les lieux à visiter et les arêtes représentent les routes ou pistes, avec les distances en kilomètres.



B : Le lagon bleu. H : Rocher Hvitserkur. M : Lac de Mývatn.
D : Chute d'eau de Dettifoss. J : Lagune glacière de Jökulsárlón. R : Capitale Reykjavik.
G : Geyser de Geysir. L : Massif du Landmannalaugar. V : Ville de Vik.

Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant d'aller du sommet B (Le lagon bleu) au sommet D (Chute d'eau de Dettifoss).

Préciser alors le trajet à emprunter.