<u>Géométrie analytique</u> <u>Vecteurs et coordonnées</u>

I- <u>Repère du plan</u>

Définition On définit un repère par la donnée d'une origine O et d'un couple de vecteurs non colinéaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ appelé base du repère . On parle du repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Dans un tel repère, on a :

- Un point M a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans ce repère $\Leftrightarrow$ $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$
- Un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans ce repère $\Leftrightarrow$ $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$

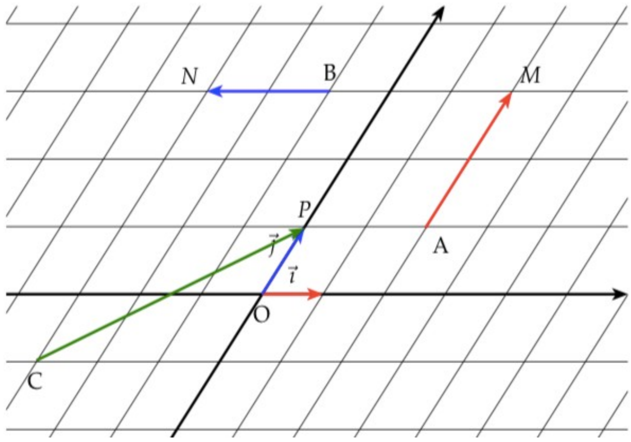
<u>Exemples</u>

Dans ce repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) , on peut écrire :

$\vec{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ $\vec{OB} = -\vec{i} + 3\vec{j}$

$\vec{BN} = -2\vec{i}$ $\vec{CP}$ = ... $\vec{i}$ + ... $\vec{j}$

$\vec{ON}$ = ... $\vec{i}$ + ... $\vec{j}$ $\vec{AM}$ =



<u>Rappels</u>

- Si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires alors le repère est dit **orthogonal**
- Si de plus les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont la même longueur alors le repère est **orthonormé**

II- <u>Utilisation des coordonnées</u>

Dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan

- **<u>Vecteurs égaux</u>** Deux vecteurs $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont égaux $\Longleftrightarrow$ ils ont les mêmes coordonnées

  autrement dit $\vec{u} = \vec{v}$ $\Longleftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x = x' \\ y = y' \end{pmatrix}$

- **<u>Règles de calculs</u>**
  - **Somme** Si $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} + \vec{v}$ $\begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix}$
  - **Produit par un réel** Si $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ alors pour tout réel k, $k\,\vec{u}$ $\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$

<u>Exemples</u> Soit $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$, $\vec{v}$ $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}$ $\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$

On a donc $15\,\vec{u}$ $\begin{pmatrix} 15 \times \frac{1}{3} \\ 15 \times \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ c'est à dire $15\,\vec{u}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\vec{v} + \vec{w}$ $\begin{pmatrix} -4 + 9 \\ 7 + 5 \end{pmatrix}$ c'est à dire $\vec{v} + \vec{w}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $15\,\vec{u}$ et $\vec{v} + \vec{w}$ ont donc les mêmes coordonnées donc ils sont égaux : $15\,\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$

On se place dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$)

Coordonnées d'un vecteur

- Si A $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\vec{AB}$ $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Norme d'un vecteur

- Soit $\vec{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

  La norme de $\vec{AB}$ est donnée par : $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

- Plus généralement, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, la norme de $\vec{u}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemple Soit A (-3 ; 5) et B (4 ; -6)

Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ c'est à dire $\vec{AB}$ $\begin{pmatrix} 4-(-3) \\ -6-5 \end{pmatrix}$

$\vec{AB}$ $\begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix}$

La longueur AB est donc : $\|\vec{AB}\| = \sqrt{7^2 + (-11)^2} = \sqrt{49+121} = \sqrt{170}$

III- Colinéarité en géométrie analytique

Définition On appelle déterminant de deux vecteurs $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le nombre noté

det $(\vec{u};\vec{v})$ défini par det $(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

Théorème

Deux vecteurs $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ det $(\vec{u};\vec{v}) = 0$ $\Leftrightarrow$ $xy' - x'y = 0$

Exemple Dans les deux cas suivants, dire si les vecteurs sont colinéaires :

1) $\vec{u}(10;-5)$ et $\vec{v}(-4;2)$ det $(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 10\times 2-(-5)\times(-4)=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires	2) $\vec{u}(3;-2)$ et $\vec{v}(6;-1)$ det $(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3\times(-1)-(-2)\times 6 = 9 \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

A noter qu'il est parfois inutile de calculer le déterminant car le rapport entre les deux vecteurs est facile à deviner : si $\vec{u}(4;2)$ et $\vec{v}(8;4)$ on a $\vec{v}=2\vec{u}$ d'où la colinéarité