Chapitre 8 : Calcul algébrique

I- Développement d'une expression

a) Par la distributivité

- **Simple** : Pour tous nombres a , b et k , on a : **k(a+b) = ka+kb**
- **Double** : Pour tous nombres a , b , c et d , on a : **(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd**

Quelques exemples

1) Facile : Développer P(x) = $(2x-3)(4x+5)$

P(x) = $8x^2+10x-12x-15$

P(x) = $8x^2-2x-15$

2) Développer de deux façons : Q(x) = $4(5x-1)(2x-1)$

On est en présence de deux multiplications donc on peut dans l'ordre que l'on veut :

Q(x) = $[4(5x-1)](2x-1)$	ou	Q(x) = $4[(5x-1)(2x-1)]$
Q(x) = $(20x-4)(2x-1)$		Q(x) = $4(10x^2-5x-2x+1)$
Q(x) = $40x^2-20x-8x+4$		Q(x) = $4(10x^2-7x+1)$
Q(x) = $40x^2-28x+4$		Q(x) = $40x^2-28x+4$

3) **Prudence** : Développer S(x) = $(2x+1)(-x+3)-(5x-4)(2x-1)$

Méfiance avec le signe moins entre les deux termes :

S(x) = $(-2x^2+6x-x+3)-(10x^2-5x-8x+4)$

S(x) = $(-2x^2+5x+3)-(10x^2-13x+4)$

S(x) = $-2x^2+5x+3-10x^2+13x-4$

S(x) = $-12x^2+18x-1$

b) A l'aide des égalités remarquables

Pour tous nombres réels a et b , on a :

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

Exemples

$(2x+3)^2 = 4x^2+12x+9$

$(5x-2)^2 = 25x^2-20x+4$

$(3x-4)(3x+4) = 9x^2-16$

L'avantage des ces égalités est d'aller plus vite dans le développement de ce type d'expression

II- Factorisation d'une expression

La factorisation est l'opération contraire du développement : on part d'une somme et on cherche à l'écrire comme un produit de facteurs .

a) Avec un facteur commun

> Si une expression est écrite sous la forme ka+kb, on la factorise en mettant k en «facteur» c'est à dire :
>
> ka+kb = k(a+b)
>
> k s'appelle **le facteur commun**

Exemples

P(x) = $7x-28$

on met 7 en facteur

P(x) = $7(x-4)$

Q(x) = $7x^3-8x$

On met x en facteur

Q(x) = $x(7x^2-8)$

S(x) = $(x+3)^2-(x+3)(5x-1)$

On met x+3 en facteur

S(x) = $(x+3)[(x+3)-(5x-1)]$

S(x) = $(x+3)(x+3-5x+1)$

S(x) = $(x+3)(-4x+4)$

b) Avec les égalités remarquables

On peut aussi utiliser les égalités remarquables mais « à l'envers »

> Pour tous nombres réels a et b , on a :
> - $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ appelé carré parfait
> - $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$ appelé carré parfait
> - $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ appelé différence de deux carrés

Exemples

P(x) = $4x^2-49$

P(x) = $(2x)^2-7^2$

P(x) = $(2x-7)(2x+7)$

Q(x) = $25x^2-10x+1$

Q(x) = $(5x)^2-2\times5x\times1+1^2$

Q(x) = $(5x-1)^2$

S(x) = $(3x-2)^2-(5x-1)^2$

On reconnaît une différence de deux carrés

S(x)= $[(3x-2)+(5x-1)][(3x-2)-(5x-1)]$

S(x) = $(3x-2+5x-1)(3x-2-5x+1)$

S(x) = $(8x-3)(-2x-1)$

III- Transformer une écriture fractionnaire

Soit P(x) = $\frac{3x-2}{x-5}$. Il est clair que l'on ne peut pas calculer P(5) car $x-5$ = 0 pour x = 5 et on ne peut pas diviser par zéro. 5 est appelé **une valeur interdite** pour P(x) .

> On considère le quotient $\frac{\mathrm{N}(x)}{\mathrm{D}(x)}$. Toute valeur de x qui annule D(x) est appelé **une valeur interdite** pour le quotient

Réduction d'une écriture fractionnaire

Les règles de calculs rencontrées sur les fractions restent valables même en présence d'une inconnue x

Exemples Soit P(x) = $\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}$ et Q(x) = $\frac{x}{1+x}+\frac{1}{x}$.

On peut réduire ces deux écritures en les réduisant au même dénominateur :

$P(x) = \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$ $\qquad$ $Q(x) = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{x}$

une valeur interdite x = 0 $\qquad$ deux valeurs interdites x = -1 et x = 0

$P(x) = \frac{3 \times x}{x \times x} + \frac{2}{x^2}$ $\qquad$ $Q(x) = \frac{x \times x}{(1+x) \times x} + \frac{1 \times (1+x)}{x \times (1+x)}$

$P(x) = \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}$ $\qquad$ $Q(x) = \frac{x^2}{x(1+x)} + \frac{1+x}{x(1+x)}$

$P(x) = \frac{3x+2}{x^2}$ $\qquad$ $Q(x) = \frac{x^2+1+x}{x(1+x)}$

IV- Quelques résolutions d'équations

1) Le produit nul

Un produit de facteurs est nul **si et seulement si** l'un des facteurs est nul

Un classique de troisième qu'il faut savoir appliquer :

$(5x-1)(3x+1)=0$ si et seulement si l'un des facteurs est nul

$5x-1 = 0$ et $3x+1 = 0$

$x = \frac{1}{5}$ et $x = -\frac{1}{3}$

$S = \{ \frac{1}{5} ; -\frac{1}{3} \}$

2) Le quotient nul

Un quotient est nul **si et seulement si** son numérateur est nul **ET** son dénominateur non nul

$\frac{5x-1}{3x+2}=0$ si et seulement si $5x-1 = 0$ ET $3x+2 \neq 0$

si et seulement si $x = \frac{1}{5}$ ET $x \neq -\frac{2}{3}$

Comme $\frac{1}{5} \neq -\frac{2}{3}$, on peut écrire $S = \{ \frac{1}{5} \}$

3) Equation X^2 = k

On considère l'équation X^2 = k avec $k \in \mathbb{R}$

- Si k < 0 , l'équation n'a pas de solution
- si k = 0 , l'équation a pour solution X = 0
- si k > 0 , l'équation a pour solution $X = \sqrt{k}$ et $X = -\sqrt{k}$

2 exemples pour comprendre

- L'équation $x^2 = 7$ a pour solution $x = \sqrt{7}$ et $x = -\sqrt{7}$
- L'équation $(2x-1)^2 = 16$ correspond à $X^2 = k$ pour $X = 2x-1$ et k = 16 d'où

$2x-1 = \sqrt{16}$ $\qquad$ ou $\qquad$ $2x-1 = -\sqrt{16}$

$2x-1 = 4$ $\qquad$ $2x-1 = -4$

$x = \frac{5}{2}$ $\qquad$ $x = -\frac{3}{2}$

$S = \{ \frac{5}{2} ; -\frac{3}{2} \}$