PROBABILITES

I- Expériences aléatoires

Définitions :

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on peut prévoir quelles sont les **issues possibles** (ou **éventualités**), mais dont on ignore laquelle sera obtenue avant que l'expérience ne soit réalisée
- L'ensemble de toutes les éventualités constitue **l'univers** de l'expérience aléatoire. Il est noté Ω

Exemples : Le lancer d'un dé tétraédrique à 4 faces constitue une expérience aléatoire d'univers :

$$\Omega = \{ \qquad\qquad\qquad \}$$

II- Lois de probabilités

Modéliser une expérience aléatoire sur un univers Ω, c'est choisir une loi de probabilité sur Ω qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.

Propriété (loi des grands nombres)

Si on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire d'univers Ω alors la distribution des fréquences obtenues se rapproche de la **loi des probabilités** de cette expérience

Définir une **loi de probabilité** pour une expérience aléatoire consiste à:

- Préciser **l'univers** Ω de cette expérience c'est à dire l'ensemble des issues possibles
- Attribuer à chacune de ces issues **une probabilité** (un nombre entre 0 et 1) de telle sorte que la somme des probabilités soit égale à 1

Exemple : On jette un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4

- L'univers est constitué des chiffres de 1 à 4
- Si le dé est équilibré, on peut proposer la loi de probabilité suivante :

issues	1	2	3	4
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

On a alors $p_1+p_2+p_3+p_4=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$

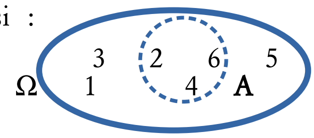
III- Probabilités d'événements

a) Notion d'événement

Définitions

- Un **événement** A est une partie (ou sous ensemble) de l'univers Ω
- Tout événement formé d'une seule éventualité est appelé **événement élémentaire**
- $\emptyset$ est appelé **événement impossible**
- Ω est appelé **l'événement certain**

Dans le lancer d'un dé, l'univers Ω est { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }. L'événement A : « obtenir un nombre pair » est constitué de 2 , 4 , 6 . On schématise la situation ainsi :



On note $A \subset \Omega$
et on lit A inclus dans Ω

b) Probabilité d'un événement

Définition La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui réalisent cet événement

Conséquence : $P(\Omega) =$, $p(\varnothing) =$

Pour tout événement A, on a : $\leq P(A) \leq$

Par exemple, la probabilité d'obtenir un nombre pair lors du lancer d'un dé équilibré est :

$P(\text{pair}) = P(2) + P(4) + P(6) =$

c) Situation d'équiprobabilité

Définition et propriété :

- Lorsque les n issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité p de se réaliser, on parle de loi équirépartie ou d'équiprobabilité. Dans un tel cas, on a : p =
- Dans le cas d'une loi équirépartie, la probabilité d'un événement A est donnée par :

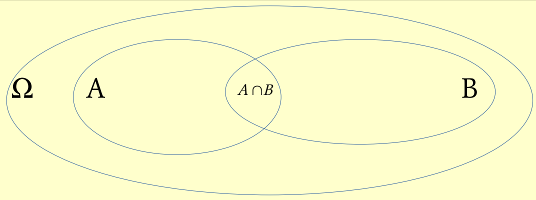
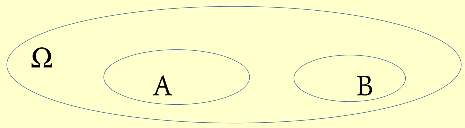
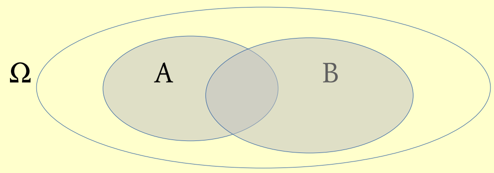
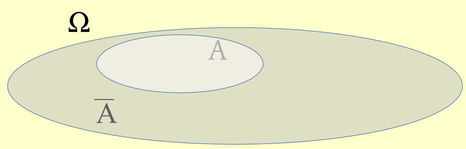
$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues dans A}}{\text{nombre d'issues possibles dans } \Omega}$$

De nombreuses expériences sont en situation d'équiprobabilité :

- le lancer d'un dé équilibré
- le lancer d'une pièce de monnaie équilibrée

IV- Calculs de probabilités

a) Définitions: Soit A et B deux événements d'une expérience aléatoire

L'**intersection** de A et B est l'événement, noté $A \cap B$, formé des issues qui réalisent à la fois l'événement A **et** l'événement B	
Si aucune issue ne réalise A et B c'est à dire si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont **incompatibles** ou **disjoints**	
La **réunion** de A et B est l'événement, noté $A \cup B$, formé des issues qui réalisent l'événement A **ou** l'événement B c'est à dire **au moins** l'un des deux	
L'**événement contraire** d'un événement A, noté $\overline{A}$, est l'événement formé des issues qui ne réalisent pas A.	

b) Opérations sur les événements

Propriétés: Soit une expérience aléatoire d'univers Ω muni d'une loi de probabilité

- Pour tous événements A et B , P $(A \cup B)$ = P(A) + P(B) – P $(A \cap B)$
- Pour tous événements A et B , si A et B sont incompatibles, on a : P $(A \cup B)$ = P(A) + P(B)
- Pour tout événement A, P($\overline{A}$) = 1 – P(A)

Démonstration :

- Dans le calcul de P(A) + P(B), les probabilités correspondant aux événements élémentaires de $A \cup B$ apparaissent deux fois.

  Pour obtenir P($A \cup B$), il faut donc retrancher une fois P $(A \cap B)$ à P(A) + P(B)
- Si A et B sont incompatibles, on a $A \cap B = \emptyset$, donc P $(A \cap B)$ = 0 d'où la formule
- La réunion d'un événement A et de son contraire $\overline{A}$ forment l'univers $\Omega = A \cup \overline{A}$.

  Or A et $\overline{A}$ sont incompatibles d'où P(Ω) = P($A \cup \overline{A}$) = P(A) + P($\overline{A}$).

  Or Ω représente l'événement certain donc P(Ω) = 1 . On en déduit donc que : P(A) + P($\overline{A}$) = 1 et la formule P($\overline{A}$) = 1 – P(A)