

Les vecteurs

I. Translation de vecteur \vec{AB}

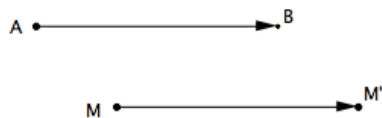
a) Définitions

Définition : TRANSLATION

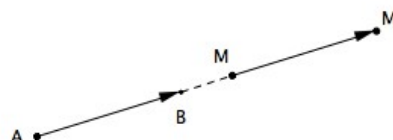
A et B désignent deux points du plan

La **translation qui transforme A en B** associée à tout point M du plan, l'unique point M' tel que ABM'M soit un parallélogramme. Cette translation est appelée **la translation de vecteur** \vec{AB} notée $t_{\vec{AB}}$

1er cas : $M \notin (AB)$



2ème cas : $M \in (AB)$



Vocabulaire :

- Le point M' est appelé **l'image** de M par $t_{\vec{AB}}$
- On dit aussi que M' est le **translaté** de M

Remarques

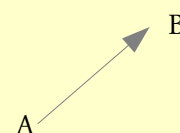
| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Une symétrie centrale est une transformation associée à un demi-tour | |
| <ul style="list-style-type: none"> • Une symétrie axiale peut être associée à un effet miroir | |
| <ul style="list-style-type: none"> • Une translation modélise un glissement rectiligne. Pour la définir, on indique la direction, le sens et la longueur du mouvement d'où la définition suivante : | |

Définition d'un vecteur Soit A et B deux points du plan

Le vecteur \vec{AB} se définit par :

- une **direction** : celle de la droite (AB)
- un **sens** : celui de A vers B
- une **longueur** ou **norme** : celle du segment [AB] notée $\|\vec{AB}\|$

On dit alors que A est **l'origine** du vecteur \vec{AB} et B son **extrémité**



Remarque : Lorsque les points A et B sont confondus, le vecteur \vec{AB} est le vecteur nul. On le note $\vec{0}$.

b) Vecteurs égaux

Définition : Dire que deux vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont égaux signifie qu'ils ont :

- la même direction : $(AB) // (CD)$
- le même sens : le sens de A vers B est le même que celui de C vers D
- la même longueur : $AB = CD$

Propriété : Deux vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont égaux si et seulement si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati.

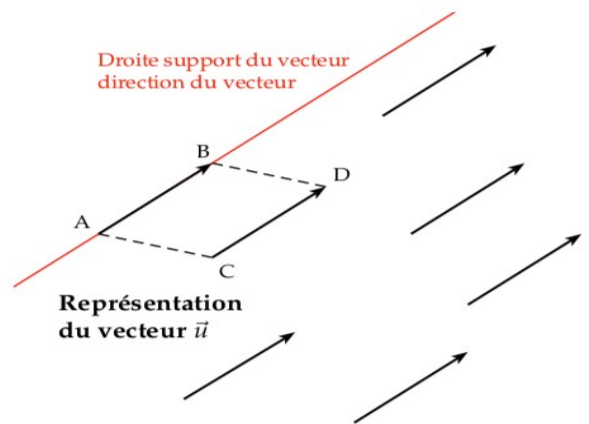
$$\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow \text{ABDC est un parallélogramme}$$

Représentants d'un vecteur

Sur la figure ci-contre, On a construit deux vecteurs égaux \vec{AB} et \vec{CD} mais on peut en tracer d'autres.

Tous les « segments munis une flèche » représentent le même vecteur \vec{AB} . On décide alors de noter ce même vecteur à l'aide d'une seule lettre \vec{u} .

Les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont alors des représentants du vecteurs \vec{u}



II. Sommes de vecteurs

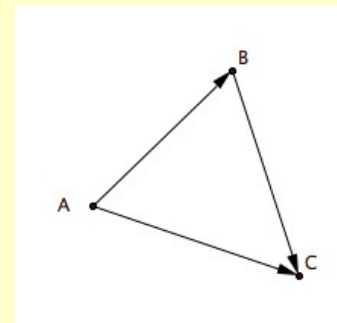
a) Relation de Chasles

Propriété :

Effectuer une translation de vecteur \vec{AB} suivie d'une translation de vecteur \vec{BC} revient à effectuer une translation de vecteur \vec{AC} ce qui se note :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} .$$

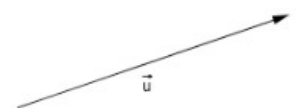
Cette relation s'appelle **la relation de Chasles**



- Cette opération très simple permet de décomposer un vecteur en deux vecteurs plus intéressants . La seule contrainte est de faire correspondre l'origine du deuxième vecteur avec l'extrémité du premier

- La relation de Chasles permet d'écrire : $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}$. Or $\vec{AA} = \vec{0}$ donc $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$ d'où $\vec{AB} = -\vec{BA}$. On dira que les vecteurs \vec{AB} et \vec{BA} sont opposés.
De manière générale, $-\vec{u}$ désigne l'opposé de \vec{u}

Construire l'opposé de \vec{u} sur la figure ci-contre



b) Règle du parallélogramme

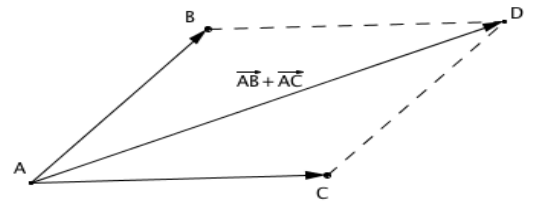
la règle du parallélogramme : Soit ABDC un parallélogramme. On a l'égalité : $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$

Démonstration : Soit ABDC un parallélogramme.

On a donc $\vec{AC} = \vec{BD}$ d'où : $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BD}$

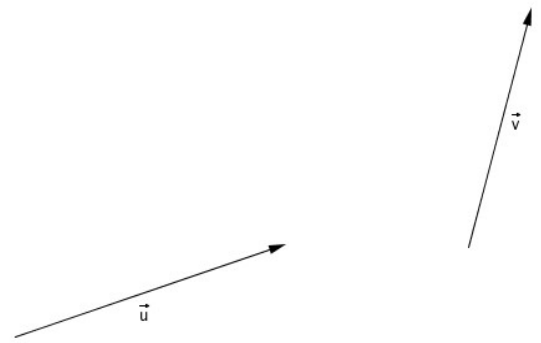
La relation de Chasles permet alors d'écrire que

$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$$



c) Addition de deux vecteurs

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs quelconques du plan.
 On cherche à construire le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$.
 Pour cela, soit A,B,C et D quatre points du plan tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{CD} = \vec{v}$.
 Construire le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ revient donc à construire
 On construit alors le point E tel que $\vec{BE} = \vec{CD}$
 On a alors : $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AE}$
 D'où $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AE}$

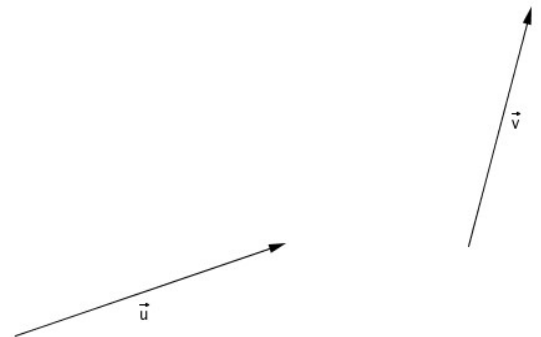


d) Soustraction de deux vecteurs

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.
 Soustraire le vecteur \vec{v} au vecteur \vec{u} , c'est additionner son opposé $-\vec{v}$ à \vec{u} :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

 Ainsi, soustraire deux vecteurs revient à une addition



III- Multiplication d'un vecteur par un scalaire

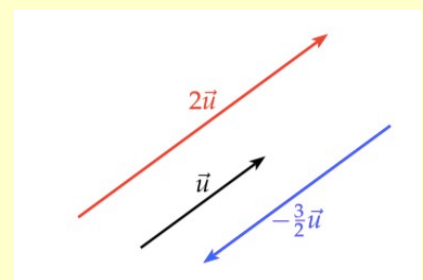
Le mot scalaire est utilisé en math pour désigner un nombre réel

a) Définition

Définition : Soit \vec{u} un vecteur et k un réel

On définit le produit $k\vec{u}$ du scalaire k par le vecteur \vec{u} par :

- si k est positif, \vec{u} et $k\vec{u}$ ont même direction, même sens et $\|k\vec{u}\| = k \|\vec{u}\|$
- si k est négatif, \vec{u} et $k\vec{u}$ ont même direction, sont de sens contraires et $\|k\vec{u}\| = -k \|\vec{u}\|$



b) Quelques propriétés

Propriété : La multiplication d'un vecteur par un scalaire est dite bilinéaire ce qui veut dire que :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$

Ces deux égalités permettent de travailler avec les vecteurs (presque) comme on travaille avec des nombres

$$3\vec{u} + 4\vec{u} =$$

$$7\vec{u} - 4(\vec{u} - \vec{v}) =$$

c) Colinéarité de vecteurs

Définition : Dire que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** signifie qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Remarque :

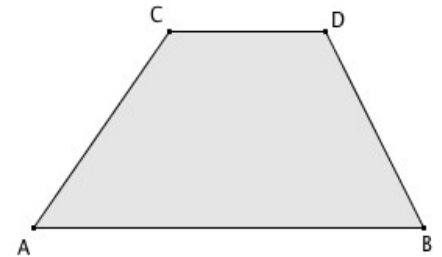
- Le vecteur $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur \vec{u} car $\vec{0} = 0\vec{u}$

- Le trapèze ABDC ci-contre est tel que $AB = 5$ et $CD = 2$

Le vecteur \vec{CD} n'est pas un représentant du vecteur \vec{AB} car les longueurs AB et CD ne sont pas égales .

On peut cependant écrire la relation vectorielle suivante :

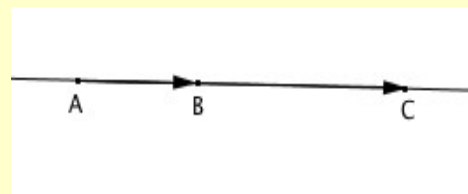
$$\vec{CD} = \frac{2}{5} \vec{AB}$$



Théorème 1: Points alignés

Trois points A , B et C sont alignés **si et seulement si** les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires :

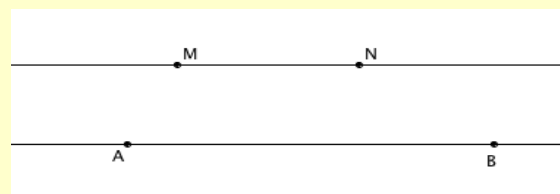
$$A , B , C \text{ alignés} \Leftrightarrow \vec{AC} = k \vec{AB}$$



Théorème 2 : Droites parallèles

Deux droites (AB) et (MN) sont parallèles **si et seulement si** les vecteurs \vec{AB} et \vec{MN} sont colinéaires :

$$(AB) // (MN) \Leftrightarrow \vec{AB} = k \vec{MN}$$



Ces deux théorèmes sont importants car ils permettent de démontrer assez facilement que des points sont alignés ou que des droites sont parallèles. Vous les retrouverez régulièrement jusqu'en terminale