Chapitre 3 : Les nombres réels

I Les différents ensembles de nombres

Nous avons vu en activité que les nombres peuvent se regrouper selon différents ensembles :

1. **Les entiers**

- **L'ensemble des entiers naturels** (entiers positifs) noté $\mathbb{N}$: { 0 ; 1 ; 2 ; ... }
- **L'ensemble des entiers relatifs** (entiers positifs ou négatifs) noté $\mathbb{Z}$:
  { ... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; ... }

2. **Les décimaux**

L'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec a $\in \mathbb{Z}$ et n $\in \mathbb{N}$ est appelé e**nsemble des nombres décimaux noté ID** .

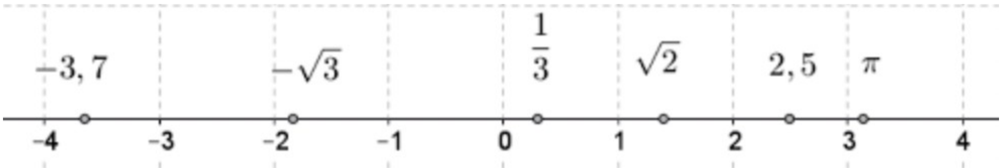
3. **Les rationnels**

L'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers relatifs (q non nul) est appelé e**nsemble des nombres rationnels noté $\mathbb{Q}$** .

4. **Les rationnels et les irrationnels**

Si un nombre ne peut pas s'écrire sous forme d'un quotient de deux entiers (comme $\sqrt{2}$) , on l'appelle **un irrationnel**. Les rationnels et les irrationnels forment alors l'ensemble de tous les nombres que vous connaissez : on l'appelle **l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$.**

A noter que tout nombre réel peut être placé sur une droite munie d'une origine O et d'une graduation. Une telle droite est appelée **la droite des réels**



5. **Les poupées russes**

Un entier naturel est un entier relatif, un entier est un décimal (3 = 3,00) , un décimal est un rationnel , un rationnel est un réel . Ainsi ces ensembles de nombres s'emboîtent comme des poupées russes .

En math, on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ qui se lit :
$\mathbb{N}$ inclus dans $\mathbb{Z}$ inclus dans D inclus dans $\mathbb{Q}$ inclus dans $\mathbb{R}$

II- Les Intervalles de IR

a) Définition

Dans la suite, a et b désignent deux nombres réels tels que a < b

Ensemble des réels x tels que :	Représentation graphique	intervalle
$a \leq x \leq b$		
$a < x < b$		
$a < x \leq b$		
$x < b$		
$x \geq a$		

Vocabulaire [a ; b] se lit « intervalle **fermé** a , b »] a ; b [se lit « intervalle **ouvert** a ,b »
] a ; b] se lit « intervalle a , b **ouvert** en a et **fermé** en b »

Cas particulier IR =]- ∞ ; + ∞ [[a ; a] = { a } ;] a ; a [= Ø (ensemble vide)

b) Opération sur les intervalles

Soit I et J deux intervalles

- L'ensemble des réels appartenant à I **ET** à J est **l'intersection** de I et J notée $I \cap J$. On lit «I inter J»
- L'ensemble des réels appartenant à I **OU** à J est **la réunion** de I et J notée $I \cup J$. On lit «I union J»

Exemple :

a) I = [-2;5[et J =]1;7[alors $I \cap J$ =]1;5[et $I \cup J$ = [-2;7[

b) I =]1;5[et J =]-∞;3] alors $I \cap J$ =]1;3] et $I \cup J$ =]-∞;5[

III- Valeur absolue d'un nombre réel

a) Définition

Définition

La **valeur absolue** d'un nombre réel a est le nombre noté $|a|$ et tel que $|a| = \begin{cases} a & si \;\; a \text{ est positif} \\ -a & si \;\; a \text{ est négatif} \end{cases}$

Exemples $|5|=5$ car 5 est positif ; $|-3| = -(-3)$ car -3 est négatif ;
$|\pi-5| = -(\pi-5) = -\pi+5$ car $\pi-5$ est négatif

Remarques La valeur absolue d'un nombre est toujours positive. C'est le grand intérêt d'une valeur absolue.

Quand on veut un nombre positif on pense aux valeurs absolues : par exemple , $\sqrt{a^2}$ = ...

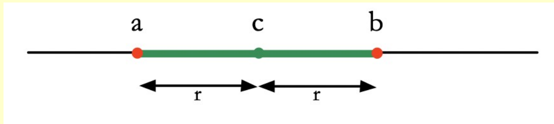
Propriété La distance entre deux points A et B sur une droite graduée est égale à AB = $|x_B - x_A|$

LE = $x_E - x_L$ = $2,5-(-3)$ = 5,5 car $x_E > x_L$.

MF = $x_M - x_F$ = $8-(-7)$ = 15 car $x_M > x_F$

Intervalle et valeur absolue

Soit I = [a;b] un intervalle de **centre** c et de **rayon** r .
La distance entre c et un autre point de l'intervalle est toujours inférieure à r .



Ainsi on a : $x \in [a\,;b] \Leftrightarrow |x-c| \leq r$

Exemple

- On veut caractériser l'intervalle $[-1;9]$ à l'aide d'une valeur absolue.

  On commence par calculer son centre: c = $\frac{-1+9}{2}$ = 4

  On calcule alors le rayon : 9 – 4 = $4-(-1)$ = 5

  On a donc x ∈ [-1;9] ⇔ $|x-4| \leq 5$
- On veut déterminer l'intervalle défini par $|x-3,5| \leq 2$

$$|x-3,5| \leq 2$$
$$-2 \leq x-3,5 \leq 2$$
$$-2+3,5 \leq x \leq 2+3,5$$
$$1,5 \leq x \leq 5,5$$

x ∈ $[1,5;3,5]$

Le style de tableau à savoir compléter

« encadrement »	Représentation graphique	Valeur absolue	intervalle
x ≥ -2			
			x ∈]-∞;5[
			x ∈ $[-5;9]$

IV- Les racines carrées

a) Définition

- La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif noté $\sqrt{a}$ dont le carré est a : $\sqrt{a}\times\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$

Racine d'un carré

Pour tout nombre positif a, $\sqrt{a^2}=a$

b) Règles de calculs

Pour tous nombres positifs a et b , $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$ et $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemple : $\sqrt{48} = \sqrt{16\times3} = \sqrt{16}\times\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ $\sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$

$\sqrt{50}-4\sqrt{72} = \sqrt{25\times2}-4\times\sqrt{36\times2} = 5\sqrt{2}-4\times6\sqrt{2} = 5\sqrt{2}-24\sqrt{2} = -19\sqrt{2}$

Les questions flash : égalité remarquable , Les puissances de 10

- $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

  $(2x+3)(2x-3)=4x^2-9$, $64x^2-49=(8x-7)(8x+7)$
- **Les puissances de dix** (très utiles quand on veut indiquer un décalage de la virgule)

  $6756 = 6{,}756\times10^3$; $0{,}0003452 = 3{,}452\times10^{-4}$

  $0{,}003456 = 34{,}56\times10^{-4} = 3456\times10^{-6} = 3{,}456\times10^{-3}$

  Parmi ces trois écritures de 0,003456 la dernière est appelée **écriture scientifique**

Mille millions de mille sabords !

“ En travaillant assidûment il faut peu de chose pour changer le médiocre en bon et le bon en excellent. ”

Gustave Flaubert - *Les lettres à Louise Colet, le 21 mars 1852.*