Fonctions affines, Tableaux de signes

I- Fonctions affines

a) Définition

Définition On appelle fonction affine toute fonction définie par f(x) = ax+b où a et b sont des réels

Un cas particulier le cas b = 0 : les fonctions affines **linéaires**
Une fonction qui s'écrit f(x) = ax est dite **linéaire**. Une telle fonction illustre les situations de proportionnalité

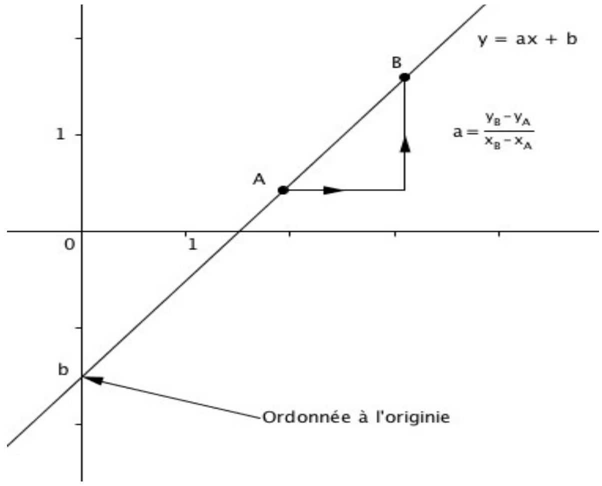
b) Détermination d'une fonction affine

A partir du graphique

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite d d'équation y = ax + b.

- b s'appelle **l'ordonnée à l'origine**
- a s'appelle le **coefficient directeur** de la droite.
  Pour deux points distincts A et B de d, on a :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



A partir de la donnée de deux images

On sait qu'une droite d passe par $A(-2;-4)$ et $B(1;5)$

donc la fonction affine f qui lui est associée respecte : $\begin{cases} f(-2)=-4 \\ f(1)=5 \end{cases}$

d'où comme une fonction affine s'écrit $f(x)=ax+b$, on en déduit que : $\begin{cases} -2a+b=-4 \\ a+b=5 \end{cases}$

- Si on soustrait ces deux équations, il vient : $(-2a+b)-(a+b)=-4-5$
  $-3a = -9$
  a = 3
- On reprend alors $a+b = 5$ qui donne b = 2

On a donc f(x) = 3x+2

II- Sens de variation d'une fonction affine

Sens de variation d'une fonction affine

Soit f une fonction affine $x \longmapsto ax+b$

- Si a > 0 alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si a < 0, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si a = 0, alors f est constante sur $\mathbb{R}$

D'où le tableau de variation d'une fonction affine pour $a \neq 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x) pour a > 0		↗	

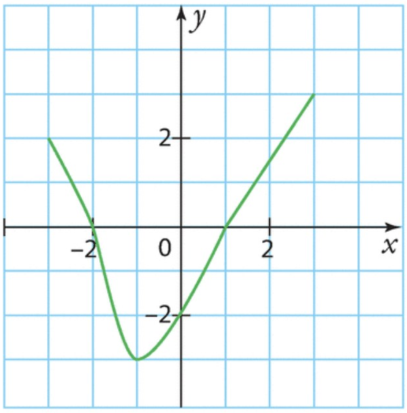
x	$-\infty$		$+\infty$
f(x) pour a < 0		↘	

III- <u>Signe d'une fonction</u>

Déterminer **le signe d'une fonction f** consiste à déterminer les valeurs de x pour lesquelles f(x) est **strictement positif, nul ou strictement négatif**

Ce signe est souvent présenté sous la forme d'un tableau
La fonction représentée ci-contre est :

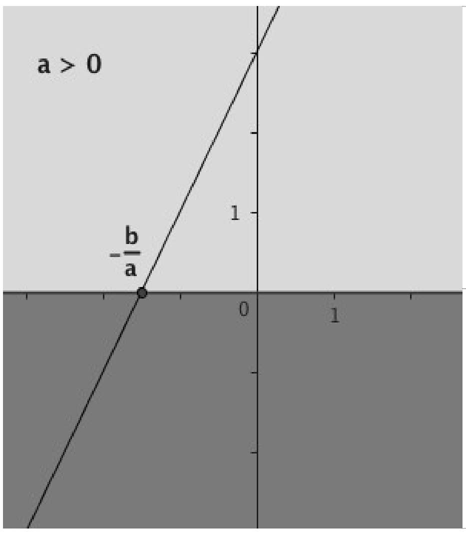
- strictement positive sur $[-3;-2[\cup]1;3]$
- nul en x = –2 et x = 1
- strictement négative sur $]-2;1[$



x	–3		–2		1		3
$f(x)$		+	0	–	0	+	

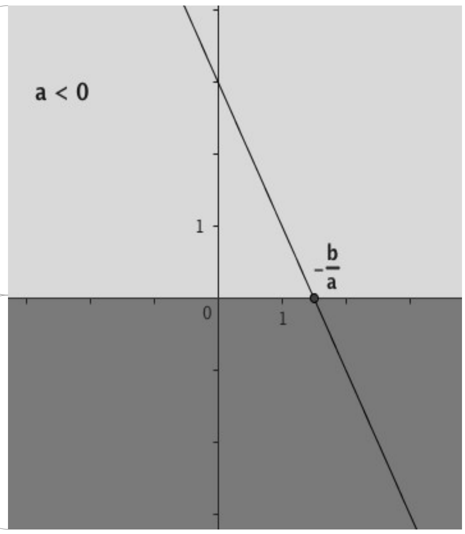
a) <u>Le cas d'une fonction affine f(x) = ax + b avec a ≠ 0</u>

Deux cas de figures peuvent se présenter selon que la fonction est croissante ou décroissante :



ax + b > 0

ax + b < 0



On résume ces résultats dans un tableau de signes de ax + b :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de ax+b		signe de – a	0	signe de a	

Application

Compléter les tableaux de signes suivants :

Calculs éventuels :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de 7x−1 a =	

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de 2−3x a =	

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $\frac{1}{2}$ x− $\frac{3}{4}$ a =	

b) Signe d'un produit, d'un quotient de deux fonctions affines

On peut aussi réaliser un tableau de signe quand on est en présence d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions affines :

- **Cas d'un produit :** Résoudre l'inéquation $(2x-1)(3-2x) \geq 0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de 2x-1		−	0	+		+	
Signe de 3-2x		+		+	0	−	
Signe du produit		−	0	+	0	−	

Les solutions de l'inéquation sont donc S = $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$

- **Cas d'un quotient :** Résoudre l'inéquation $\frac{2x-1}{3-2x} \geq 0$

  La seule différence par rapport au produit est la présence d'une valeur interdite x = $\frac{3}{2}$. En effet pour x = $\frac{3}{2}$, le dénominateur est nul ce qui n'est pas possible. On le signale dans le tableau par une double barre :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de 2x-1		−	0	+		+	
Signe de 3-2x		+		+	0	−	
Signe du quotient		−	0	+	‖	−	