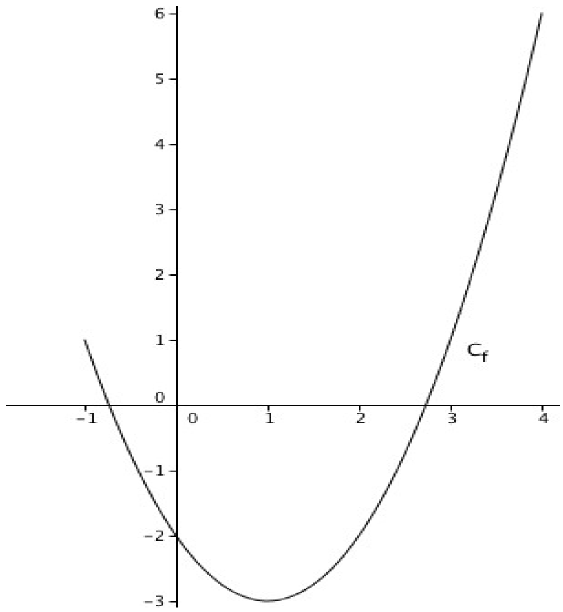
Variations de fonctions, Extremum d'une fonction

I- Variations d'une fonction

Soit f la fonction définie sur [-1;4] par f(x) = $x^2 - 2x - 2$
On donne ci-contre la courbe représentative de cette fonction.



D'après ce graphe, la fonction f est **décroissante** sur [-1;1] et **croissante** sur [1;4]

On résume ces informations dans un tableau de variations :

x	-1	1	4
Variation de f	1	-3	6

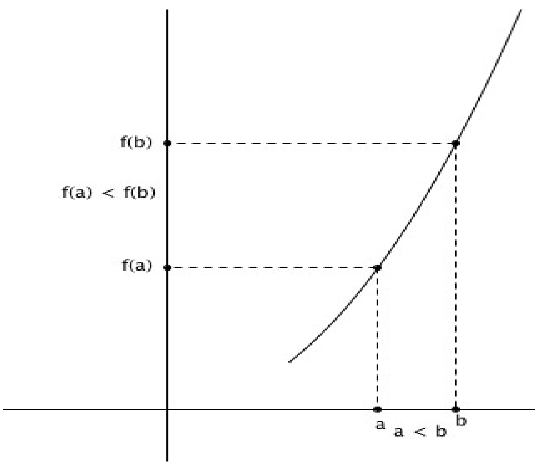
La fonction f étant décroissante sur [-1;1] et croissante sur [1;4], elle admet un minimum en x = 1 qui vaut -3

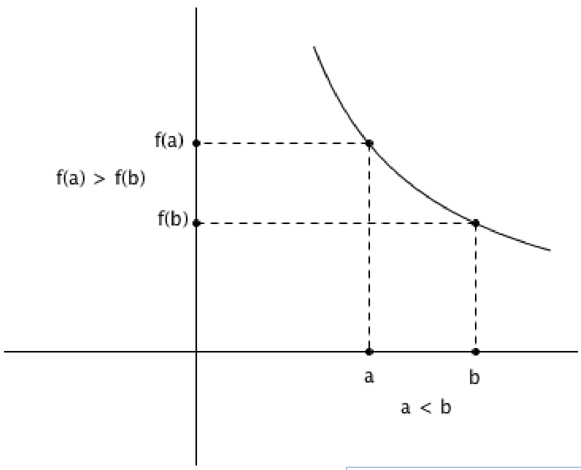
Définition

- Dire qu'une fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que lorsque x augmente sur I, alors f(x) augmente
  Autrement dit, pour tous réels a et b de I, **si a ≤ b alors f(a) ≤ f(b)**
  On dit que f conserve l'ordre

- Dire qu'une fonction f est décroissante sur un intervalle I signifie que si x augmente sur I alors f(x) diminue
  Autrement dit, pour tous réels a et b de I, **si a ≤ b alors f(a) ≥ f(b)**
  On dit que f inverse l'ordre

Illustration





f est croissante : si a ≤ b alors f(a) ≤ f(b)

f est décroissante : si a ≤ b alors f(a) ≥ f(b)

Point méthode :

Pour démontrer qu'une fonction est croissante ou décroissante sur un intervalle I, on prend deux réels a et b dans l'intervalle I tel que a < b et on cherche alors à comparer f(a) et f(b)

A noter qu'une fonction qui est soit croissante , soit décroissante sur un intervalle I est dite **monotone sur I**

II- Extremum d'une fonction

Définitions :

- La fonction f présente **un maximum** en a sur l'intervalle I lorsque :

  pour tout x de I , $f(x) \leq f(a)$

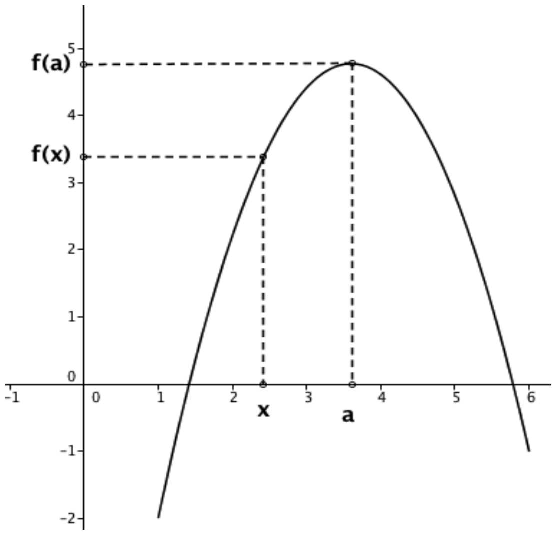
- La fonction f présente **un minimum** en a sur l'intervalle I lorsque :

  pour tout x de I , $f(x) \geq f(a)$

- Un **extremum** est le terme utilisé pour désigner un maximum ou un minimum

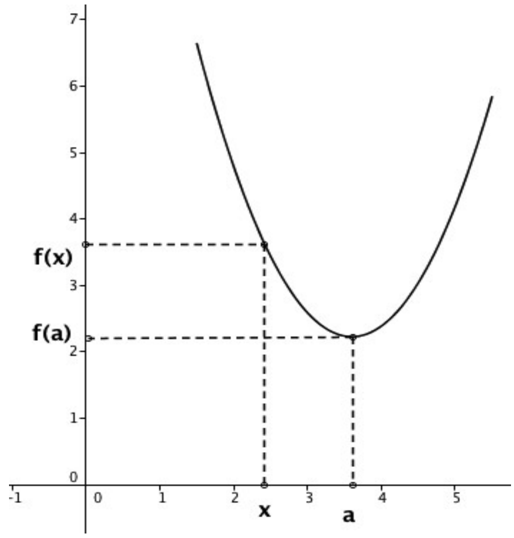
Illustration

Maximum



pour tout x ∈ [1;6] , f(x) ≤ f(a)

Minimum



pour tout x ∈ [1,5;5,5] , f(x) ≥ f(a)

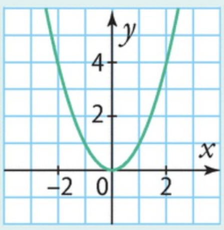
III- Fonctions de référence Les fonctions carré, inverse, racine carré et cube

Fonction carré

$x \mapsto x^2$

La fonction carré est décroissante sur ℝ– et croissante sur ℝ+.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$		↘	0	↗	

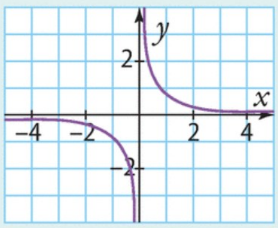


Fonction inverse

$x \mapsto \frac{1}{x}$

La fonction inverse est décroissante sur ℝ*– et décroissante sur ℝ* +.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$		↘	‖	↘	

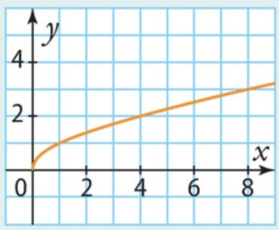


Fonction racine carrée

$x \mapsto \sqrt{x}$

La fonction racine carrée est croissante sur ℝ+.

x	0		$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0	↗	



Fonction cube

$x \mapsto x^3$

La fonction cube est croissante sur ℝ.

x	$-\infty$		$+\infty$
$x \mapsto x^3$		↗