

SUJET 1

Exercices

Ex1 Résoudre l'équation différentielle $(1+x^2)y' + 4xy = x(1+x^2)$

$1+x^2$ étant non nul sur $\mathbb{R}$, l'équation devient $y' + \frac{4x}{1+x^2}y = x$ c'est à dire $y' + ay = b$

L'EDHA est $y' + \frac{4x}{1+x^2}y = 0$ Les solutions sont du type $y_0 = \lambda e^{-A}$ pour tout réel λ et A une

primitive de $\frac{4x}{1+x^2}$: $2\ln(1+x^2)$ donc $y_0 = \lambda e^{-2\ln(1+x^2)} = \frac{\lambda}{(1+x^2)^2}$

On cherche alors une solution particulière de la forme $y_p = \mu y_0$ avec $y_0 = \frac{1}{(1+x^2)^2}$

On a alors μ qui est une primitive de $\frac{b(x)}{y_0(x)} = \dots = x(1+x^2)^2$ donc $\mu(x) = \frac{1}{6}(1+x^2)^3$

On a donc $y_p(x) = \mu(x) y_0(x) = \frac{1}{6}(1+x^2)^3 \times \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{6}(1+x^2)$

Les solutions de (E) sont $\frac{1}{6}(1+x^2) + \frac{\lambda}{(1+x^2)^2}$

Ex2

a) Calculer $I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx$

On distinguera trois cas : 1) $m = n = 0$ 2) $m = n \neq 0$ 3) $m \neq n$

Si $m = n = 0$ alors

$$I_{n,n} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Si $m = n \neq 0$ alors

$$I_{n,n} = \int_0^{2\pi} \cos^2(nt) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2nt) dt = \pi$$

Si $m \neq n$, en exploitant

$$\cos(mt) \cos(nt) = \frac{1}{2} (\cos(m+n)t + \cos(m-n)t)$$

on obtient

$$I_{m,n} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m+n)t dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m-n)t dt = \frac{[\sin(m+n)t]_0^{2\pi}}{2(m+n)} + \frac{[\sin(m-n)t]_0^{2\pi}}{2(m-n)} = 0$$

b) Calculer $\int_0^1 \arctan t \, dt$

$$I = \int_0^1 \arctan t \, dt.$$

1. Intégration par parties : poser $u = \arctan t$ et $dv = dt$.

Alors $du = \frac{1}{1+t^2} dt$ et $v = t$.

Donc

$$\int \arctan t \, dt = t \arctan t - \int \frac{t}{1+t^2} dt.$$

2. Calculer sur $[0, 1]$:

$$I = [t \arctan t]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt.$$

$$[t \arctan t]_0^1 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

3. Pour l'intégrale restante, substitution $w = 1 + t^2$, $dw = 2t \, dt$:

$$\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} [\ln(1+t^2)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2.$$

4. Résultat :

$$\int_0^1 \arctan t \, dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

c) Déterminer $\int \frac{1}{t \sqrt{t^2-1}} dt$

Supposons $t > 1$ et posons

$$t = \frac{1}{\cos \theta} \quad (\text{donc } \cos \theta = \frac{1}{t}, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})).$$

On a $dt = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$ et

$$\sqrt{t^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} = \tan \theta.$$

L'intégrande devient

$$\frac{1}{t \sqrt{t^2-1}} dt = \frac{1}{\frac{1}{\cos \theta} \cdot \tan \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = d\theta.$$

Donc une primitive est $\theta + C$. En revenant à t ,

$$\int \frac{1}{t \sqrt{t^2-1}} dt = \arccos\left(\frac{1}{t}\right) + C \quad (t > 1).$$

SUJET 2

Ex1 Résoudre l'équation différentielle $|x| y' + (x-1)y - x^2 = 0$

► On se place sur l'intervalle $I_- =]-\infty, 0[$. L'équation sous forme résolue devient

$$(E_-): y' + \frac{1-x}{x} y = -x$$

Les fonctions $a: x \mapsto \frac{1-x}{x}$ et $b: x \mapsto -x$ sont continues sur I_- donc (E_-) est une EDL du 1^{er} ordre. Les solutions de l'EDHA sont les fonctions du type

$$x \mapsto \lambda e^{-\int \frac{1-x}{x} dx} = \lambda e^{-\int (\frac{1}{x}-1) dx} = \lambda e^{-\ln(-x)+x} = -\lambda \frac{e^x}{x} = \alpha \frac{e^x}{x}$$

On cherche une solution particulière de (E_-) à l'aide de la MVC. On cherche une solution sous la forme $y = \mu y_0$ avec μ une fonction dérivable sur I_- à déterminer et y_0 une solution non nulle de l'EDHA, par exemple $y_0(x) = -\frac{e^x}{x}$. On a

$$\mu(x) = \int \frac{b(x)}{y_0(x)} dx = \int x^2 e^{-x} dx$$

On effectue une première IPP en choisissant :

$$\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_- . On obtient

$$\mu(x) = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx$$

On effectue une seconde IPP dans l'intégrale restante en choisissant :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_- . On obtient

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x}$$

On a donc $\mu(x) = -(x^2 + 2x + 2) e^{-x}$; la solution particulière obtenue est $y(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x}$.
Les solutions sur I_- sont donc

$$\mathcal{S}_- = \left\{ \begin{array}{ll}]-\infty, 0[& \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \mapsto \frac{x^2 + 2x + 2}{x} + \alpha \frac{e^x}{x} \end{array} \middle| \alpha \in \mathbf{R} \right\}$$

On se place sur l'intervalle $I_+ =]0, +\infty[$. L'équation sous forme résolue devient

$$(E_+) : y' + \frac{x-1}{x} y = x$$

Les fonctions $a : x \mapsto \frac{x-1}{x}$ et $b : x \mapsto x$ sont continues sur I_+ donc (E_+) est une EDL du 1^{er} ordre. Les solutions de l'EDHA sont les fonctions du type

$$x \mapsto \lambda e^{-\int \frac{x-1}{x} dx} = \lambda e^{-\int (1 - \frac{1}{x}) dx} = \lambda e^{-x + \ln(x)} = \lambda x e^{-x}$$

On remarque que la fonction $x \mapsto x$ satisfait l'équation $xy' + (x-1)y = x^2$. C'est donc une solution particulière de l'équation. Les solutions sur I_+ sont donc

$$\mathcal{S}_+ = \left\{ \begin{array}{ll}]0, +\infty[& \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \mapsto x + \lambda x e^{-x} \end{array} \middle| \lambda \in \mathbf{R} \right\}$$

Ex2 Calculer les intégrales suivantes

$$\int_1^2 \ln t \, dt \quad \text{facile}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) \, dx$$

Calculer

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) \, dx$$

La fonction $x \mapsto \ln(1 + \tan x)$ est définie et continue sur $[0; \pi/4]$ donc I existe.
 $\ln(1 + \tan x) = \ln(\cos x + \sin x) - \ln(\cos x)$ et $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} - x)$.
Ainsi

$$I = \frac{\pi \ln 2}{8} + \int_0^{\pi/4} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) dx$$

or

$$\int_0^{\pi/4} \ln \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx \stackrel{t = \frac{\pi}{4} - x}{=} \int_0^{\pi/4} \ln \cos(t) dt$$

donc

$$I = \frac{\pi \ln 2}{8}$$

$$\int_1^e t^n \ln t \, dt \quad \text{facile par partie}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sqrt{1-t^2} dt$$

Facile avec $t = \cos(u)$ on utilise alors les formules de duplication

on trouve $\frac{\pi}{16}$

Sujet 3

Ex1

On cherche à résoudre l'équation différentielle (E) : $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$

1) Cette équation est-elle linéaire ? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?

2) Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$

a) Calculer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$

b) En déduire que z vérifie une équation différentielle (E') linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera

(on pourra poser $x = e^t$ dans (E))

c) Résoudre (E')

d) En déduire les solutions de (E)

3) Vérifier réciproquement que les solutions trouvées conviennent

1. Oui, il s'agit bien d'une équation linéaire, mais elle n'est pas à coefficients constants.

2.

2.1. On doit dériver une fonction composée. On trouve

$$z'(t) = e^t y'(e^t) \text{ et } z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t).$$

2.2. En posant, comme indiqué dans l'énoncé, $x = e^t$, (E) se réécrit :

$$e^{2t} y''(e^t) - 3e^t y'(e^t) + 4y(e^t) = 0.$$

On exprime ensuite $y'(e^t)$ et $y''(e^t)$ en fonction de $z'(t)$ et de $z''(t)$. On trouve :

$$y'(e^t) = e^{-t} z'(t) \text{ et } y''(e^t) = e^{-2t} z''(t) - e^{-t} y'(e^t) = e^{-2t} (z''(t) - z'(t)).$$

En introduisant cela dans (E), on obtient

$$z''(t) - z'(t) - 3z'(t) + 4z(t) = 0 \iff z''(t) - 4z'(t) + 4z(t) = 0.$$

2.3. Il s'agit maintenant d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, dont la seule solution est $\lambda = 2$. Ainsi, il existe deux constantes a et b telles que $z(t) = ae^{2t} + bte^{2t}$.

2.4. On revient à y par $y(x) = z(\ln x)$ et $t = \ln x$. On trouve que si y est solution de l'équation, alors on a

$$y(x) = ax^2 + bx^2 \ln(x).$$

3. On a montré que si y est solution de (E), alors il existe deux réels a, b tels que, pour tout $x > 0$, on a $y(x) = ax^2 + bx^2 \ln(x)$. Réciproquement, il est facile de vérifier que la fonction $x \mapsto ax^2 + bx^2 \ln x$ est solution de l'équation. On a donc trouvé toutes les solutions de l'équation.

Ex2 Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \quad \text{facile} \quad \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{facile}$$

$$\int_0^1 \ln(1+t^2) dt \quad \text{On intègre par partie}$$

$$u = \ln(1+t^2) \quad \text{et } v'(t) = 1 \quad u' = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et } v(t) = t$$

$$J = [t \ln(1+t^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} dt = \ln 2 - 2 \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= \ln 2 - 2[t - \arctan(t)]_0^1$$

$$= \ln 2 - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \ln 2 - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} dt$$

On calcule une primitive de

$$\frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} = \frac{1}{t^{1/2} + t^{3/2}}.$$

Factorisons $t^{1/2}$:

$$\frac{1}{t^{1/2} + t^{3/2}} = \frac{1}{t^{1/2}(1+t)} = \frac{t^{-1/2}}{1+t}.$$

Posons $t = u^2$ (donc $u = \sqrt{t}$, $dt = 2u du$). Alors

$$\frac{t^{-1/2}}{1+t} dt = \frac{1/u}{1+u^2} \cdot 2u du = \frac{2}{1+u^2} du.$$

Une primitive est donc

$$\int \frac{2}{1+u^2} du = 2 \arctan u + C.$$

En revenant à t :

$$\int \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} dt = 2 \arctan(\sqrt{t}) + C \quad (t > 0).$$

Ex2 Résoudre l'équation différentielle $(1+x^2)y' + 4xy = x(1+x^2)$

Voir sujet 1