

SUJET 1

Exercices

Ex1 Soit R la relation définie dans $\mathbb{R}$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x R y \Leftrightarrow x e^y = y e^x$
Montrer que R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Réflexivité. Pour tout réel x , on a $x e^x = x e^x$ et donc, pour tout réel x , on a $x R x$. Par suite, la relation R est réflexive.
Symétrie. Soient x et y deux réels tels que $x R y$. On a donc $x e^y = y e^x$ puis $y e^x = x e^y$ et donc $y R x$. On a montré que pour tous réels x et y , si $x R y$ alors $y R x$. Par suite, la relation R est symétrique.
Transitivité. Soient x, y et z trois réels tels que $x R y$ et $y R z$. On a donc $x e^y = y e^x$ et $y e^z = z e^y$. On en déduit que
$$x e^z = x e^y e^{-y} e^z = y e^x e^{-y} e^z = y e^z e^{-y} e^x = z e^y e^{-y} e^x = z e^x$$
et donc $x R z$. On a montré que pour tous réels x, y et z , si $x R y$ et $y R z$, alors $x R z$. Par suite, la relation R est transitive.
Finalement, la relation R est réflexive, symétrique et transitive. Par suite, la relation R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Ex2 Soit E un ensemble. Soit $f : E \rightarrow E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective

- On suppose que f est injective. Montrons que f est surjective. Soit $x \in E$. Par hypothèse sur $f : f(f(f(x))) = f(x)$. Comme f est injective, $f(f(x)) = x$. En posant $z = f(x)$, $z \in E$ et $f(z) = x$ donc x est une image. Donc f est surjective.
- On suppose que f est surjective. Montrons que f est injective. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. Comme f est surjective, il existe $(t, t') \in E^2$ tel que $x = f(t)$ et $x' = f(t')$. On a donc $f(f(t)) = f(f(t'))$. En composant par $f : f(f(f(t))) = f(f(f(t')))$. D'après l'hypothèse sur $f : f(f(t)) = f(f(t'))$ soit $x = x'$. Donc f est injective.

Ex3 Soit $f(x) = \frac{1}{x^2 - 7x + 10}$

a) Montrer que $f(x) = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-5} \right)$ facile

b) En déduire une primitive de f sur $[6;7]$ $f'(x) = \frac{1}{3} (-\ln(x-2) + \ln(x-5)) = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{x-5}{x-2}\right)$

SUJET 2

Exercices

Ex1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

1) f est-elle injective ? Surjective ? (on pourra étudier les variations de f)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0				1		0
			-1				

Injective ?

Non sur $\mathbb{R}$. En effet la fonction n'est pas monotone sur tout $\mathbb{R}$ (elle décroît puis croît puis décroît) : elle prend certaines valeurs deux fois. Par exemple $f(2) = \frac{4}{5} = 0,8$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1,25} = 0,8$,
donc $f(2) = f(1/2)$ avec $2 \neq 1/2$. Donc f n'est pas injective.

Surjective ?

Non sur $\mathbb{R}$: $f(x)$ est toujours compris entre -1 et 1 (voir point 2). Donc f n'atteint pas, par exemple, la valeur 2 .

2) Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1;1]$ facile

3) Montrer que la restriction $g : [-1;1] \rightarrow [-1;1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection facile

Ex2 On définit une relation binaire R sur $\mathbb{R}^{+*}$ par: $x R y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n$
Montrer que R est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

1) Réflexivité

Pour tout $x > 0$ on a $x = x^1$ avec $1 \in \mathbb{N}^*$.
Donc $x R x$. La relation est **réflexive**.

2) Transitivité

Supposons $x R y$ et $y R z$. Alors il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que
 $y = x^n$ et $z = y^m$.

Alors $z = (x^n)^m = x^{nm}$ et $nm \in \mathbb{N}$, donc $x R z$.
La relation est **transitive**.

3) Antisymétrie

Supposons $x R y$ et $y R x$. Il existe $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que
 $y = x^n$ et $x = y^m = (x^n)^m = x^{nm}$.

Donc $x^{nm-1} = 1$.

- Si $x = 1$, alors $y = 1^n = 1$ et donc $x = y$.
- Si $x \neq 1$, alors pour un réel $x > 0$ différent de 1 on sait que $x^k = 1$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) entraîne $k = 0$. Ici $k = nm - 1$ est un entier, donc $nm - 1 = 0$, d'où $nm = 1$. Comme n, m sont des entiers strictement positifs, on obtient nécessairement $n = m = 1$. Alors $y = x^1 = x$.

Dans tous les cas on aboutit à $x = y$. Donc la relation est **antisymétrique**.

4) L'ordre est-il total ?

Non. Un ordre total (linéaire) exigerait que pour tous $x, y > 0$ on ait soit $x R y$ soit $y R x$. Ici « $x R y$ » signifie « y est une puissance entière positive de x ». Prenons par exemple $x = 2, y = 3$.

Aucune des deux égalités $3 = 2^n$ ou $2 = 3^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$) n'est vraie, donc ni $2 R 3$ ni $3 R 2$. Ainsi 2 et 3 sont **incomparables** pour R . Donc R n'est pas total.

Ex3 Soit $f(x) = \frac{1}{x^2 - 7x + 10}$ facile

a) Montrer que $f(x) = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-5} \right)$

b) En déduire une primitive de f sur $[6;7]$

SUJET 3

Exercices

Ex1 On considère quatre ensembles A, B, C, D et des applications

$$f : A \rightarrow B, \quad g : B \rightarrow C, \quad h : C \rightarrow D$$

a) Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective}$$

$$g \circ f \text{ surjective} \Rightarrow g \text{ surjective}$$

a) Implications élémentaires

(i) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.

Soient $x_1, x_2 \in A$ avec $f(x_1) = f(x_2)$. Alors

$$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2).$$

Comme $g \circ f$ est injective, on a $x_1 = x_2$. Donc f est injective.

(Remarque : plus généralement, si $P \circ Q$ est injective alors Q est injective.)

(ii) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

Soit $c \in C$. Par surjectivité de $g \circ f$ il existe $a \in A$ tel que $(g \circ f)(a) = c$, c.-à-d. $g(f(a)) = c$. Ainsi c appartient à l'image de g . Donc g est surjective.

(Remarque : en général, si $P \circ Q$ est surjective alors P est surjective.)

b) Montrer que : $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives $\Leftrightarrow f, g, h$ sont bijectives

b) Équivalence bijectivité (formulation précise)

Affirmation à démontrer :

$$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}) \iff f, g, h \text{ sont toutes bijectives.}$$

($\Rightarrow$) Supposons $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives. Montrons f, g, h bijectives.

1. $g \circ f$ bijective $\Rightarrow$ injective et surjective.

- Injective $\Rightarrow$ d'après (a)(i) f est injective.
- Surjective $\Rightarrow$ d'après (a)(ii) g est surjective.

2. $h \circ g$ bijective $\Rightarrow$ injective et surjective.

- Injective $\Rightarrow$ d'après (a)(i) g est injective.

Ainsi g est à la fois injective et surjective, donc bijective. Puisque g est bijective :

- $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est composée de bijections donc bijective.
- $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ est composée de bijections donc bijective.

Donc f, g, h sont bijectives.

Ex2 Soit $E = \mathbb{R}^2$ et on définit une relation R par :

$$(x,y) R (x',y') \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2.$$

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.

► **Réflexivité**

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2$$

Donc $(x,y) \sim (x,y)$.

✓ La relation est **réflexive**.

► **Symétrie**

Supposons $(x,y) \sim (x',y')$.

Alors $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$.

Cette égalité est évidemment symétrique, donc :

$(x',y') \sim (x,y)$.

✓ La relation est **symétrique**.

► **Transitivité**

Supposons $(x,y) \sim (x',y')$ et $(x',y') \sim (x'',y'')$.

Alors :

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 \quad \text{et} \quad x'^2 + y'^2 = x''^2 + y''^2$$

d'où :

$$x^2 + y^2 = x''^2 + y''^2$$

ce qui donne $(x,y) \sim (x'',y'')$.

✓ La relation est **transitive**.

✓✓ **Conclusion :**

$\sim$ est **réflexive, symétrique et transitive**, donc c'est bien une **relation d'équivalence** sur $\mathbb{R}^2$.

2. Décrire les classes d'équivalence

La **classe d'équivalence** d'un point (x,y) est :

$$\overline{(x,y)} = \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \mid x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2\}.$$

Autrement dit, c'est l'ensemble des points qui sont à la même distance de l'origine que (x,y) .

✳ **Interprétation géométrique :**

• Si $(x,y) \neq (0,0)$, la classe d'équivalence est le **cercle de centre O(0,0) et de rayon** $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

• Si $(x,y) = (0,0)$, alors la classe est réduite à un seul point : $\{(0,0)\}$.

$$\overline{(x,y)} = \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \mid x'^2 + y'^2 = r^2\}$$

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

Ex3 Soit $f(x) = \frac{1}{x^2 - 7x + 10}$ voir sujet 1

a) Montrer que $f(x) = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-5} \right)$

b) En déduire une primitive de f sur $[6;7]$