

Sujet 1 : Khôlle 3

Ex1 On rappelle que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

- 1) Démontrer, par l'absurde, que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$ alors $a = 0$ et $b = 0$

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $a + b\sqrt{2} = 0$ sans que $a=0$ et $b=0$ car si $b = 0$ alors on devrait aussi avoir $a = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse $(a;b) \neq (0;0)$ mais alors on aurait $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux et on a $a = 0$ et $b = 0$

- 2) En déduire que si m, n, p, q sont des entiers relatifs alors :
 $m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2} \Leftrightarrow m=n$ et $p=q$

Facile $m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2}$ donc $(m-p) + (n-q)\sqrt{2} = 0$ et d'après la question précédente $m-p=0$ et $n-q=0$ d'où la réponse

Ex2 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + xf(1-x) = 1+x \quad (1)$$

aide : on pourra penser à poser $y = 1-x$

Soit f une fonction solution s'il en existe

En posant $y = 1-x$ il vient $f(1-y) + (1-y)f(y) = 2-y$ pour tout y

Ainsi $yf(1-y) + (y-y^2)f(y) = 2y-y^2$ (2) or d'après la relation (1) on a $f(y) + yf(1-y) = 1+y$ d'où $yf(1-y) = 1+y-f(y)$

En remplaçant dans (2) il vient $1+y-f(y) + (y-y^2)f(y) = 2y-y^2$ ce qui donne $(y-y^2-1)f(y) = y-y^2-1$ d'où $f(y) = 1$ et donc f est la fonction constante égale à 1

Réciproquement, cette fonction convient donc c'est la seule solution du problème

Ex3 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout

$$\text{entier naturel } n \text{ non nul, } u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1} u_{n-1}$$

Démontrer que pour tout $n \neq 0$, $1 \leq u_n \leq n^2$

Sujet 2 : Khôlle 3

Ex1 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n, u_{n+1} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}$$

Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n$

initialisation : $2^0 = 1 = u_0$

Effectuons une récurrence forte :

supposons que pour tout $k \leq n$, $u_k = 2^k$ et DQ $u_{n+1} = 2^{n+1}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n 2^k 2^{n-k} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n 2^n \\ &= \frac{2}{n+1} \times (n+1) \times 2^n = 2^{n+1} \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Exo 2

On a les égalités

$$A \cup B = A \cap C, \quad B \cup C = B \cap A, \quad C \cup A = C \cap B.$$

Utilisons la première :

• $A \subset A \cup B$ donc $A \subset A \cap C$. Ainsi $A \subset C$ et (puisque $A \cap C \subset A$) $A \cup B \subset A$. Or $A \cup B \subset A$ implique $B \subset A$.

Donc de la première égalité on obtient

$$B \subset A \quad \text{et} \quad A \subset C.$$

Avec la deuxième égalité $B \cup C = B \cap A$ on procède de la même façon :

• $B \subset B \cup C = B \cap A$ donc $B \subset A$ (déjà obtenu) et $B \subset C$ n'est pas direct ; mais $B \cap A \subset B$ donne $B \cup C \subset B$ donc $C \subset B$.

Ainsi de la deuxième on obtient

$$C \subset B.$$

On a donc les inclusions

$$C \subset B \subset A \subset C.$$

D'où $A = B = C$.

- 2) Donner un exemple d'une application $f : E \rightarrow F$ et de deux parties A et B de E telles que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

Prenons un exemple simple :

$E = \{1, 2\}$, $F = \{a\}$ et $f: E \rightarrow F$ définie par $f(1) = a$, $f(2) = a$ (application constante).

Posons $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$.

- $A \cap B = \emptyset$ donc $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$.
- $f(A) = \{a\}$ et $f(B) = \{a\}$, donc $f(A) \cap f(B) = \{a\}$.

Ainsi $f(A \cap B) = \emptyset \neq \{a\} = f(A) \cap f(B)$.

Ex3 Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + xf(1-x) = 1+x \quad (1)$$

aide : on pourra penser à poser $y = 1-x$

Soit f une fonction solution s'il en existe

En posant $y = 1-x$ il vient $f(1-y) + (1-y)f(y) = 2-y$ pour tout y

Ainsi $yf(1-y) + (y-y^2)f(y) = 2y - y^2$ (2) or d'après la relation (1) on a $f(y) + yf(1-y) = 1+y$ d'où $yf(1-y) = 1+y - f(y)$

En remplaçant dans (2) il vient $1+y - f(y) + (y-y^2)f(y) = 2y - y^2$ ce qui donne $(y-y^2-1)f(y) = y - y^2 - 1$ d'où $f(y) = 1$ et donc f est la fonction constante égale à 1

Réciproquement, cette fonction convient donc c'est la seule solution du problème

Sujet 3 Khôlle 3

Exercices

Ex1 Trop facile

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et soit $A = [-1; 4]$.

Déterminer : a) L'image directe de $A = [-1; 4]$

b) L'image réciproque de A

2) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.

a) Quelle est l'image directe par f de $\mathbb{R}$? de $[0; 2\pi]$? de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

b) Quelle est l'image réciproque par f de $[0; 1]$? de $[3; 4]$? de $[1; 2]$?

Ex2 Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y$$

aide : on pourra penser à poser $y = x + f(0)$

Cherchons toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y. \quad (P(x, y))$$

1. Posons $x = f(y)$ dans (P). On obtient, pour tout y ,
 $f(0) = 2 - f(y) - y$.

D'où

$$f(y) + y = 2 - f(0) \quad \text{pour tout } y.$$

Donc il existe une constante c telle que $f(y) = c - y$ pour tout y , avec $c = 2 - f(0)$.

2. Appliquons cette forme à $y = 0$. On a $f(0) = c - 0 = c$. Donc
 $c = 2 - f(0) = 2 - c \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1$.

Ainsi $f(y) = 1 - y$ pour tout y .

3. Vérification : pour $f(x) = 1 - x$,
 $f(x - f(y)) = 1 - (x - (1 - y)) = 1 - (x - 1 + y) = 2 - x - y$,

donc la fonction vérifie bien l'équation.

Conclusion : il n'y a qu'une seule solution,
 $f(x) = 1 - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ex3 Soit (u_n) la suite pour tout entier naturel n non nul par $u_1 = 3$ et pour

tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n u_k$. Démontrer que pour tout n différent de 0

on a $u_n = 3n$

Une récurrence forte est à faire on suppose donc que pour tout $k \leq n$,
on a $u_k = 3k$ d'où

$$u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n 3k = \frac{2}{n} \times \left(\frac{3 \times n(n+1)}{2} \right) = 3(n+1) \quad \text{CQFD}$$