

Khôlle 3	Nom	Mercredi 1 octobre	Note: / 20

Cours Rappel la définition d'une partie minorée puis démontrer la propriété suivante : Soient A ,B et C trois sous ensembles de E alors

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Exercices

Ex1 On rappelle que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

- 1) Démontrer, par l'absurde, que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$ alors $a = 0$ et $b = 0$
- 2) En déduire que si m , n , p , q sont des entiers relatifs alors : $m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2} \Leftrightarrow m = p$ et $n = q$

Ex2 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + xf(1-x) = 1 + x$$

aide : on pourra penser à poser $y = 1 - x$

Ex3 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout

$$\text{entier naturel } n \text{ non nul, } u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1} u_{n-1}$$

Démontrer que pour tout $n \neq 0$, $1 \leq u_n \leq n^2$

Khôlle 3	Nom	Mercredi 1 octobre	Note: / 20

Cours Expliquer la différence entre récurrence simple , double et forte puis démontrer la propriété suivante :

Soient A ,B et C trois sous ensembles de E alors

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Exercices

Ex1 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n, u_{n+1} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}$$

Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 2^n$

Ex2

1) Soient E un ensemble et A , B , C trois sous ensembles de E tels que :

$$A \cup B = A \cap C, \quad B \cup C = B \cap A, \quad C \cup A = C \cap B$$

Montrer que $A = B = C$

2) Donner un exemple d'une application $f : E \rightarrow F$ et de deux parties A et B de E telles que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

Ex3 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + xf(1-x) = 1 + x$$

aide : on pourra penser à poser $y = 1 - x$

Khôlle 3	Nom	Mercredi 1 octobre	Note: / 20

Cours Rappeler la définition de l'image réciproque d'un ensemble puis démontrer la propriété suivante : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Exercices

Ex1

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et soit $A = [-1; 4]$.

Déterminer :

a) L'image directe de $A = [-1; 4]$

b) L'image réciproque de A

2) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.

a) Quelle est l'image directe par f de $\mathbb{R}$? de $[0; 2\pi]$? de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

b) Quelle est l'image réciproque par f de $[0; 1]$? de $[3; 4]$? de $[1; 2]$?

Ex2 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y \quad (1)$$

1) En posant $x = f(y)$, démontrer que f peut s'écrire : $f(y) = c - y$
on précisera la valeur de c

2) Appliquer alors la relation (1) pour $y = 0$ et en déduire c

3) Conclure

Ex3 Soit (u_n) la suite pour tout entier naturel n non nul par $u_1 = 3$ et

pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n u_k$. Démontrer que pour tout n

différent de 0 on a $u_n = 3n$