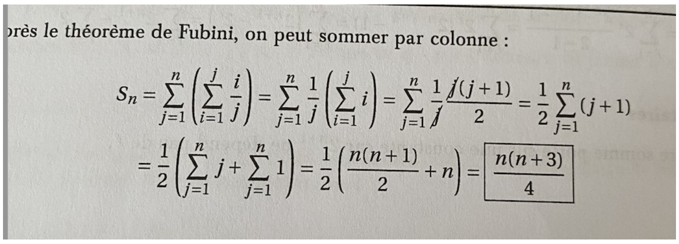
Khôlle 2

Sujet 1

Ex1 Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme double $S_n = \displaystyle\sum_{1 \le i \le j \le n} \frac{i}{j}$



rès le théorème de Fubini, on peut sommer par colonne :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\cancel{j}}\frac{\cancel{j}(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right) = \boxed{\frac{n(n+3)}{4}}$$

Ex2 Résoudre le système $\begin{cases} 2\cos(x) - \sin(x) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(x) + 2\sin(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{3} \end{cases}$

Pour $X = \cos(x)$ et $Y = \sin(x)$ le système devient $\begin{cases} 2X - Y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ X + 2Y = \frac{1}{2} - \sqrt{3} \end{cases}$

On trouve alors $\begin{cases} X = \frac{1}{2} \\ Y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Ex3 Pour tout entier naturel n non nul, soit $u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}$

Démontrer par récurrence que

Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

On utilisera pour l'hérédité une formule de duplication

une récurrence tranquille avec $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ pour $x = \frac{\pi}{2^{n+2}}$

Ex4

Pour quelles valeurs de a le système $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases}$ a-t-il aucune solution ?

Une infinité de solution ? Une unique solution ?

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z = 1 & \\ y + (a+1)z = 1 & L2 - L1 \\ (a-2)y + 4z = 1 & L3 - 2L1 \end{cases}$$

- pour $a \neq 2$, on a donc $\begin{cases} x + y - z = 1 & \\ y = 1 - (a+1)z & L_2 - L_1 \\ 4z - (a-2)(a+1)z = 1 - (a-2) & L_5 - (a-2)L_4 \end{cases}$

$$4z - (a-2)(a+1)z = 1 - (a-2)$$

$$(6 - a^2 + a)z = 3 - a \qquad z = \frac{3-a}{6 - a^2 + a} = \frac{1}{a+2} \textit{ pour } -a^2 + a + 6 \neq 0$$

c'est à dire pour $a \neq -2$ et $a \neq 3$

Ainsi pour a ≠ 2 , -2 et 3 le système admet une unique solutions

- pour a = 2 $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+3z=1 \\ 4z=1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{4} \\ z=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

- pour a= -2 , $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y-2z=2 \\ 2x-2y+2z=3 \end{cases}$ $\quad L_2+L_3$ donne 3x = 5 donc x = $\dfrac{15}{3}$

  or $2L_1-L_2$: x = 4 donc pas de solution

- pour a = 3 , $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+2z=3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=1-y+z \\ 1-y+z+2y+3z=2 \\ 2-2y+2z+3y+2z=3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=1-y+z \\ y+4z=1 \\ y+4z=1 \end{cases}$

  deux équations équivalentes donc infinités de solution

SUJET 2

Ex1 Calculer $S_n = \sum_{i=n}^{2n} (i+1+n)$

On écrit $S_n = \sum_{i=n}^{2n} i + \sum_{i=n}^{2n} 1+n = \sum_{i=1}^{2n} i - \sum_{i=1}^{n-1} i + (2n-(n-1))(1+n)$

$= \dfrac{2n(2n+1)}{2} - \dfrac{n(n-1)}{2} + (n+1)(n+1)$

$= \ldots = \dfrac{(n+1)(5n+2)}{2}$

Ex2 a) Démontrer que $\sin^4(x) = \dfrac{1}{8}(3-4\cos(2x)+\cos(4x))$

$\sin^4(x) = (\sin^2(x))^2 = \left(\dfrac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}(1-2\cos(2x)+\cos^2(2x))$

or $\cos^2(2x) = \dfrac{\cos(4x)+1}{2}$ donc $\sin^4(x) = \ldots = \dfrac{1}{8}(3-4\cos(2x)+\cos(4x))$

b) En déduire la valeur de A = $\sin^4\left(\dfrac{\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)$

Ex3 Résoudre l'équation $\cos^{2012}(x)+\sin^{2013}(x)+\cos^{2014}(x)+\sin^{2015}(x)=-3$

cos(x) et sin(x) sont compris entre 0 et 1 donc

$0 \le \cos^{2012}(x) \le 1$

$-1 \le \sin^{2013}(x) \le 1$

$0 \le \cos^{2014}(x) \le 1$

$-1 \le \sin^{2015}(x) \le 1$

par somme on a donc $-2 \le \cos^{2012}(x)+\sin^{2013}(x)+\cos^{2014}(x)+\sin^{2015}(x) \le 4$ d'où l'équation n'a pas de solution

Ex4

Pour quelles valeurs de a le système $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3 \end{cases}$

a-t-il aucune solution ? Une infinité de solution ? Une unique solution ?

Voir sujet 1

Sujet 3

Exercices

Ex1 Soit a et b deux réels. On définit $min(a,b) = \begin{cases} b & si\ a \geq b \\ a & si\ b \geq a \end{cases}$

Calculer, pour tout n $\in \mathbb{N}^*$, la somme $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} min(i,j)$

Par le théorème Fubini, on a $S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)\right)$. Fixons i dans $[\![1,n]\!]$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} \min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i = \frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i$$

On a donc

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(i^2+i+2ni-2i^2) = \frac{1}{2}\left(-\sum_{i=1}^{n} i^2 + (2n+1)\sum_{i=1}^{n} i\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(2n+1)n(n+1)}{2}\right) = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Ex2 Soit $\theta \in [0;\pi]$. On pose pour n $\in \mathbb{N}^*$, $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$

En utilisant la formule de duplication du sinus, calculer P_n

Si $\theta \in]0,\pi[$, pour tout entier k, $\frac{\theta}{2^k} \in]0,\pi[$ donc $\sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \neq 0$.
En utilisant la formule, on a alors :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{2\theta}{2^k}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)}$$

Commentaires

On a un produit télescopique ; les facteurs se simplifient deux à deux.

On effectue le changement d'indice $\ell = k-1$ au numérateur.

$$P_n = \frac{1}{2^n}\frac{\prod_{\ell=0}^{n-1}\sin\left(\frac{\theta}{2^\ell}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n}\frac{\sin(\theta)\cancel{\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)}}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cancel{\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)}} = \boxed{\frac{\sin(\theta)}{2^n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}}$$

Ex3 a) On donne $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

on utilise $\sin^2+\cos^2=1$ d'où

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1-\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{16} = \frac{16-6-2\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}-2}{16} = \frac{8-2\sqrt{6}\sqrt{2}}{16} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{16}$$

d'où comme $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ on a $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) Résoudre l'équation $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos(x)+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin(x)=2$

$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 = 16$ donc $\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}\cos(x)+\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}\sin(x)=\frac{1}{2}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos(x)+\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin(x)=\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

donc $\begin{cases} \frac{\pi}{12}-x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \frac{\pi}{12}-x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x=-\frac{\pi}{4}-2k\pi \\ x=-\frac{5\pi}{12}-2k\pi \end{cases}$

Ex4

Pour quelles valeurs de a le système $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3 \end{cases}$

a-t-il aucune solution ? Une infinité de solution ? Une unique solution ?

Voir ci-dessus